Extra Logica

door Joost Engelfriet

Supplement bij het boek Logica voor informatici

Dit manuscript bevat, hoofdstuks-gewijs, een aantal aanvullingen op en toevoegingen aan het boek "Logica voor informatici". Met name worden Hoofdstukken 4 en 10 gepreciseerd, en wordt een lineaire notatie voor bewijzen toegevoegd. De afleidingsregels voor de predikaatlogica in Sectie 19 komen *in de plaats van* die in Hoofdstuk 10 van het boek!

De tentamenstof bestaat uit Hoofdstukken 1 t/m 11 van het boek, en dit Supplement. De volgende secties van het boek hoeven niet bestudeerd te worden: 4.3 (vanaf Definitie 4.2), 4.4, 5.6 (vanaf Definitie 5.1), 7.5, 8.3, 9.3, 10.2, 11.2, 11.3, 11.4 en 11.5.

Hoofdstuk 2. Propositielogica: syntaxis en semantiek

1 Precieze semantiek

In het boek wordt geen precieze definitie van de semantiek van de propositielogica gegeven, met name niet van $V(\varphi)$ voor een waardering V en een formule φ. Zo'n definitie geven we hier, met inductie naar de opbouw van de formule φ (zie blz.17).

Allereerst merken we op dat de tabellen op blz.21 in feite een unaire operatie $\neg$ en vier binaire operaties $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ definieren op de verzameling $\{0,1\}$ van waarheidswaarden (ofwel: booleans). Deze operaties heten *boolese operaties*, netzoals de gebruikelijke operaties $+, -, \cdot$ (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen) op getallen ook wel rekenkundige operaties heten. Dus, bijvoorbeeld: de tabel voor $\neg$ op blz.21 definieert de unaire operatie $\neg : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ als volgt: $\neg 1 = 0$ en $\neg 0 = 1$; evenzo definieert de tabel voor $\wedge$ op blz.21 de binaire operatie $\wedge : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ als volgt: $1 \wedge 1 = 1$, $1 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$ en $0 \wedge 0 = 0$.

Nu geven we de precieze inductieve definitie van $V(\varphi)$. Daarbij is V een gegeven waardering van alle propositieletters.

Basis: $V(p)$ is gegeven, voor iedere propositieletter p.

Inductiestap: voor $\varphi = \neg\alpha$, $\varphi = \alpha \wedge \beta$, $\varphi = \alpha \vee \beta$, $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ en $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$ is $V(\varphi)$ als volgt gedefinieerd:

$$
\begin{aligned}
&V(\neg\alpha) = \neg V(\alpha)\\
&V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \wedge V(\beta)\\
&V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \vee V(\beta)\\
&V(\alpha \rightarrow \beta) = V(\alpha) \rightarrow V(\beta)\\
&V(\alpha \leftrightarrow \beta) = V(\alpha) \leftrightarrow V(\beta)
\end{aligned}
$$

Merk op dat aan de linkerkant van deze gelijkheden $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ en $\leftrightarrow$ symbolen zijn, terwijl ze aan de rechterkant staan voor de boolese operaties op $\{0,1\}$ zoals gedefinieerd in de waarheidstabellen op blz.21. Eigenlijk zegt de definitie dus alleen: het symbool $\wedge$ staat voor de boolese operatie in de eerste waarheidstabel op blz.21, en evenzo voor de andere symbolen. Ook als je dit een overdreven formele definitie vindt, dan zijn bovenstaande gelijkheden in ieder geval eigenschappen van $V(\varphi)$ die soms bruikbaar zijn in precieze bewijzen (zie Hoofdstuk 5).

Hoe bovenstaande definitie gebruikt wordt om $V(\varphi)$ uit te rekenen staat uitgelegd in Voorbeeld 2.9 (blz.22) voor $\varphi = (p \wedge q) \vee \neg r$ en $V(p) = 1$, $V(q) = 0$, $V(r) = 0$. Door bottom-up de waarde van iedere subformule uit te rekenen blijkt dat $V(\varphi) = 1$. In de waarheidstabel in Voorbeeld 2.10 (en Voorbeeld 2.11) wordt dan $V_i(\varphi)$ berekend voor iedere waardering V_i van de atomen p, q en r.

2 Disjunctieve normaalvorm

Volgens de definitie in het boek onderaan blz.29 is een formule φ in *disjunctieve normaalvorm* als het een disjunctie is van conjuncties van literals (d.w.z. atomen of negaties van atomen). De formule $(p \wedge q) \vee \neg r$ die op blz.28 bekeken wordt, is dus al in disjunctieve normaalvorm. Op blz.28 wordt aangetoond dat (bijna) iedere formule ook een logisch equivalente formule in een "stricte" disjunctieve normaalvorm heeft. Een formule φ die de atomen $p_1, \ldots, p_k$ bevat is in *stricte disjunctieve normaalvorm* als $\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ $(n \geq 1)$ en iedere φ_i is van de vorm $(q_1 \wedge \cdots \wedge q_k)$ met $q_j = p_j$ of $q_j = \neg p_j$. Bovendien moeten alle φ_i verschillend zijn, en dus is $n \leq 2^k$.

De formule $(p \wedge q) \vee \neg r$ is dus niet in stricte disjunctieve normaalvorm, maar de daarmee logisch equivalente formule $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ is dat wél.

In de stricte vorm is het resultaat op blz.30 bovenaan niet helemaal juist: een contradictie (d.w.z. een formule φ met $V(\varphi) = 0$ voor alle waarderingen V, bijv. $\varphi = p \wedge \neg p$) heeft geen logisch equivalente stricte disjunctieve normaalvorm φ^*.

3 Waarheidsfuncties en functionele volledigheid

Een waardering V van de atomen $p_1, \ldots, p_k$ komt op natuurlijke wijze overeen met een element $\overline{V}$ van $\{0,1\}^k$, d.w.z. met een bitrij van lengte k, waarbij de i-de bit van $\overline{V}$ gelijk is aan $V(p_i)$. Aangezien iedere formule φ die de atomen $p_1, \ldots, p_k$ bevat, voor iedere waardering V van die atomen een waarheidswaarde $V(\varphi)$ oplevert, definieert zo'n formule dus een waarheidsfunctie (ofwel: boolese functie) $\{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$. Laten we die functie hier wf_φ noemen. De definitie ervan is dus: voor iedere $\overline{V} \in \{0,1\}^k$ (d.w.z. voor iedere waardering V van $p_1, \ldots, p_k$) is $wf_\varphi(\overline{V}) = V(\varphi)$. De waarheidsfunctie wf_φ is niets anders dan een formalisatie van de waarheidstabel van de formule φ .

De opmerking na Definitie 2.10 (blz.29) betekent: voor iedere boolese functie $f : \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ bestaat er een formule φ met $wf_\varphi = f$. Dat wil dus zeggen dat alle boolese functies te definieren zijn met een formule. Dus: om boolese functies te implementeren is het voldoende om formules van de propositielogica te implementeren. En daarvoor is het weer voldoende om een "poort" (gate) te ontwerpen voor iedere connectief en die poorten dan als een constructieboom, of op een slimmere manier, aan elkaar te schakelen met als resultaat een logische schakeling (logical circuit).

Merk nu op dat twee formules φ en ψ logisch equivalent zijn dan en slechts dan als $wf_\varphi = wf_\psi$. Hieruit volgt dat een verzameling connectieven C functioneel volledig is dan en slechts dan als er voor iedere boolese functie $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ een formule φ bestaat met $wf_\varphi = f$, waarbij φ slechts connectieven uit C bevat. Dit verklaart de term 'functioneel volledig'.

4 Propositielogica en Verzamelingentheorie

De wetten van de verzamelingentheorie zijn gebaseerd op de wetten van de propositielogica (ook historisch kwam Cantor's verzamelingentheorie ná Boole's propositielogica). Laten we bijvoorbeeld eens naar één van de distributiviteitswetten kijken. Er geldt dat $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$ voor alle deelverzamelingen P, Q, R van een universum U. Deze gelijkheid wordt als volgt bewezen: Neem een willekeurig element x van U. Dan betekent $x \in P \cap (Q \cup R)$ dat $x \in P$ en ($x \in Q$ of $x \in R$), en $x \in (P \cap Q) \cup (P \cap R)$ betekent dat ($x \in P$ en $x \in Q$) of ($x \in P$ en $x \in R$). En dat betekent hetzelfde:

$$x \in P \text{ en } (x \in Q \text{ of } x \in R) \;\Leftrightarrow\; (x \in P \text{ en } x \in Q) \text{ of } (x \in P \text{ en } x \in R)$$

en daarom is $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$. Maar waarom geldt bovenstaande equivalentie eigenlijk? Omdat het een toepassing van een wet van de propositielogica is! Namelijk van de tautologie

$$p \wedge (q \vee r) \;\leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Hetzelfde geldt bijvoorbeeld ook voor de verzamelingenwet $(P \cup Q)^{\mathrm{c}} = P^{\mathrm{c}} \cap Q^{\mathrm{c}}$ en het feit dat de volgende equivalentie een tautologie is: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (en allebei heten ze naar De Morgan). Iets dergelijks geldt ook voor inclusie-wetten van verzamelingen. Bijvoorbeeld, de inclusie $P \cap Q \subseteq P \cup Q$ betekent dat voor iedere $x \in U$:

als $x \in P$ en $x \in Q$, dan $x \in P$ of $x \in Q$.

Dat dit waar is berust op het feit dat de volgende implicatie een tautologie is:

$$(p \wedge q) \to (p \vee q).$$

Voor een formule φ van de propositielogica die alleen de connectieven $\neg, \wedge, \vee$ bevat, geven we met $\widehat{\varphi}$ de verzamelingtheoretische uitdrukking aan die uit φ ontstaat door de operaties $\neg, \wedge, \vee$ om te zetten in de operaties ${}^{\mathrm{c}}, \cap, \cup$, en de kleine letters in hoofdletters. Bijvoorbeeld, als φ de formule $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge q)$ is, dan is $\widehat{\varphi}$ de uitdrukking $(P^{\mathrm{c}} \cap Q^{\mathrm{c}}) \cup (R \cap Q)$.

Uit bovenstaande overwegingen concluderen we nu dat iedere equivalentie $\varphi \leftrightarrow \psi$ die een tautologie is, omgezet kan worden in een algemeen geldige gelijkheid $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$ voor verzamelingen, en evenzo dat iedere tautologie $\varphi \to \psi$ een algemeen geldige inclusie $\widehat{\varphi} \subseteq \widehat{\psi}$ geeft. Maar dit geldt ook andersom! Iedere algemeen geldige gelijkheid voor de deelverzamelingen van een niet-leeg universum U geeft ook een tautologische equivalentie. Dat komt omdat de verzamelingen U en $\emptyset$ zich ten opzichte van de verzamelingtheoretische operaties ${}^{c}, \cap, \cup$ precies hetzelfde gedragen als 1 en 0 ten opzichte van de boolese operaties $\neg, \wedge, \vee$. Bijvoorbeeld, $U^{c} = \emptyset$ correspondeert met $\neg 1 = 0$, $U \cap \emptyset = \emptyset$ correspondeert met $1 \wedge 0 = 0$, $\emptyset \cup U = U$ correspondeert met $0 \vee 1 = 1$, etcetera. Als de gelijkheid $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$ geldt voor alle deelverzamelingen $P, Q, R, \ldots$ van U, dan geldt hij natuurlijk in het bijzonder als $P, Q, R, \ldots$ gelijk zijn aan U of aan $\emptyset$. Daaruit volgt dan dat φ en ψ dezelfde waarheidswaarde hebben voor alle waarderingen van de propositieletters $p, q, r, \ldots$, d.w.z. dat de equivalentie $\varphi \leftrightarrow \psi$ een tautologie is. Evenzo volgt uit de inclusie $\widehat{\varphi} \subseteq \widehat{\psi}$ dat $V(\varphi) \leq V(\psi)$ voor alle waarderingen V, en dat betekent dat de implicatie $\varphi \to \psi$ een tautologie is (merk op dat $1 \leq 1$, $0 \leq 1$ en $0 \leq 0$, maar niet $1 \leq 0$).

We formuleren dit nu als stelling.

Stelling (PV). Laat φ, ψ formules van de propositielogica zijn (die alleen de connectieven $\neg, \wedge, \vee$ bevatten), en laat U een niet-lege verzameling zijn. Dan geldt:

(1) $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie
$\Leftrightarrow$ $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$ geldt voor alle deelverzamelingen van U

(2) $\varphi \to \psi$ is een tautologie
$\Leftrightarrow$ $\widehat{\varphi} \subseteq \widehat{\psi}$ geldt voor alle deelverzamelingen van U

(3) φ is een tautologie
$\Leftrightarrow$ $\widehat{\varphi} = U$ geldt voor alle deelverzamelingen van U

Bewijs. Een informeel bewijs van (1) en (2) hebben we hierboven al gegeven. Bekijk voor (3) het volgende voorbeeld. De gelijkheid $P \cup P^{c} = U$ betekent dat voor iedere $x \in U$ geldt: $x \in P$ of niet $x \in P$. Dat dat waar is volgt uit de tautologie $p \vee \neg p$. Dit betekent in het algemeen: als φ een tautologie is, dan geldt $\widehat{\varphi} = U$ voor alle deelverzamelingen van U. Andersom, als $\widehat{\varphi} = U$ een algemeen geldige gelijkheid is, dan geldt hij in het bijzonder voor U en $\emptyset$ en dus is $V(\varphi) = 1$ voor iedere waardering V, d.w.z. dat φ een tautologie is.

Het is ook mogelijk om een formeel bewijs te geven, maar dat laten we hier achterwege.

□

Het valt nu op dat de propositielogica nog twee boolese operaties bevat, die niet in de verzamelingentheorie voorkomen, nl. $\to$ en $\leftrightarrow$. Evenzo bevat de verzamelingentheorie operaties die niet in de logica voorkomen, zoals het verschil $P - Q$ $(= P \cap Q^{c})$ en het symmetrisch verschil $P \oplus Q = (P - Q) \cup (Q - P)$.

Aangezien dit echter operaties zijn die in $\neg, \wedge, \vee$ of in ${}^c, \cap, \cup$ zijn uit te drukken, kunnen we de logica en de verzamelingentheorie op simpele wijze uitbreiden, met behoud van Stelling PV. Dus, omdat $p \to q$ logisch equivalent is met $\neg(p \wedge \neg q)$, definieren we voor deelverzamelingen P, Q van U: $P \to Q = (P \wedge Q^c)^c$, d.w.z. het complement van $P - Q$. En omdat $p \leftrightarrow q$ logisch equivalent is met $(p \to q) \wedge (q \to p)$ definieren we: $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \cap (Q \to P)$, d.w.z. (met De Morgan) het complement van $P \oplus Q$. Evenzo kunnen we in de logica $p - q$ definieren als $p \wedge \neg q$ (of als $\neg(p \to q)$), en $p \oplus q$ als $\neg(p \leftrightarrow q)$ (dit is de exclusieve of). Na deze uitbreidingen geldt nog steeds Stelling PV. Als we de stelling meteen met deze uitbreidingen hadden bewezen, dan was het voldoende geweest om alleen (3) te bewijzen, want (1) en (2) zijn daar een direct gevolg van. Uit (3) volgt (2) omdat

$$P \to Q = U \;\Leftrightarrow\; P - Q = \emptyset \;\Leftrightarrow\; P \subseteq Q$$

en uit (3) volgt (1) omdat

$$P \leftrightarrow Q = U \;\Leftrightarrow\; (P - Q) \cup (Q - P) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; P = Q.$$

Hoofdstuk 3. Propositielogica: geldig gevolg

5 Betekenis van de reductieregels

Op blz.37 van het boek staat de betekenis van de twee vormen van een reductieregel. Voor de linkervorm staat er dat $\Phi \circ \Psi$ een tegenvoorbeeld heeft desda $\Phi' \circ \Psi'$ een tegenvoorbeeld heeft. Dat klopt wel, maar het is een nogal beperkte uitspraak die vooral gericht is op het al of niet sluiten van tableaus, terwijl we vaak alle tegenvoorbeelden van een sequent willen vinden. Voor de linkervorm geldt namelijk zelfs dat $\Phi \circ \Psi$ en $\Phi' \circ \Psi'$ *dezelfde tegenvoorbeelden* hebben. Evenzo geldt voor de rechtervorm dat de verzameling tegenvoorbeelden van $\Phi \circ \Psi$ gelijk is aan de vereniging van de verzamelingen van tegenvoorbeelden van $\Phi' \circ \Psi'$ en $\Phi'' \circ \Psi''$. Het is eenvoudig na te gaan dat deze eigenschappen inderdaad gelden voor de reductieregels op blz.38. Dat betekent dat, op ieder moment tijdens de constructie van een semantisch tableau, de verzameling tegenvoorbeelden van de wortel-sequent gelijk is aan de vereniging van de verzamelingen tegenvoorbeelden van de blad-sequenten.

Aangezien bij iedere reductiestap een connectief verdwijnt, is de lengte van iedere tak van een semantisch tableau hoogstens gelijk aan het aantal connectieven in de wortel-sequent. Daarom eindigt de constructie van een semantisch tableau altijd met blad-sequenten die ófwel dezelfde formule zowel links als rechts bevatten ófwel van de vorm $p_1, \ldots, p_k \circ q_1, \ldots, q_m$ zijn waarbij p_i en q_j verschillende propositieletters zijn. In het eerste geval heeft de blad-sequent uiteraard geen tegenvoorbeelden (en de tak "sluit"). In het tweede geval (waarin de tak dus "open" is) bestaat de verzameling van tegenvoorbeelden van de blad-sequent uit alle waarderingen V waarvoor geldt: $V(p_i) = 1$ voor alle $1 \le i \le k$ en $V(q_j) = 0$

voor alle $1 \leq j \leq m$ (en waarvoor $V(r)$ dus 0 of 1 kan zijn voor de propositieletters r die niet in de sequent staan). Om de tegenvoorbeelden van de wortelsequent te bepalen nemen we nu dus de vereniging van alle tegenvoorbeelden van de open blad-sequenten.
Hiermee is de correctheid (of: adequaatheid) van de semantische tableaumethode aangetoond (zie blz.43):

Stelling (3.1).
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$
$\Leftrightarrow$ er bestaat een gesloten semantisch tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$
$\Leftrightarrow$ ieder semantisch tableau voor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \circ \psi$ sluit.

Daarmee vervalt het bewijs van deze stelling in Sectie 5.5 van het boek. Dat bewijs is echter (helaas) wel weer nodig om de adequaatheid van de tableaumethode voor de predikaatlogica aan te tonen (in Sectie 11.1).

Hoofdstuk 4. Propositielogica: afleidingen

In het boek ontbreekt in Hoofdstuk 4 een precieze definitie van het begrip afleiding. Zo'n definitie willen we hier geven. We laten ook zien hoe afleidingen lineair opgeschreven kunnen worden.

6 Een iets andere notatie voor de afleidingsregels

Omdat we het begrip afleiding zo precies mogelijk willen definieren, zullen we bij iedere formule die afgeleid is ook aangeven uit welke aannames de formule is afgeleid. Dit wordt in het boek ook gesuggereerd, en uitgelegd in de paragraaf 'Expliciete aannames' op blz.54. Een formule φ met aannames uit Σ formaliseren we als een *sequent*

$$\varphi \texttt{ uit } \Sigma$$

Dit is analoog aan, maar niet te verwarren met, een sequent in een semantisch tableau. In de sequent $\varphi \texttt{ uit } \Sigma$ is Σ een verzameling formules. Als $\Sigma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ dan schrijven we ook $\varphi \texttt{ uit } \psi_1, \ldots, \psi_n$. In het boek wordt dit in de paragraaf 'Expliciete aannames' op blz.54 geschreven als $\varphi\ \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$.

Een sequent $\varphi \texttt{ uit } \varphi$ is een *axioma*. In een afleiding met zo'n sequent $\varphi \texttt{ uit } \varphi$ als axioma zullen we dan de formule φ een *aanname* noemen. In het boek worden deze axiomas niet expliciet besproken, maar wel gebruikt.

We geven de afleidingsregels (blz.59) nu in de nieuwe notatie.

$$\frac{\varphi \wedge \psi \texttt{ uit } \Sigma}{\varphi \texttt{ uit } \Sigma} \wedge\mathrm{E} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi \texttt{ uit } \Sigma}{\psi \texttt{ uit } \Sigma} \wedge\mathrm{E} \qquad \frac{\varphi \texttt{ uit } \Sigma \quad \psi \texttt{ uit } \Phi}{\varphi \wedge \psi \texttt{ uit } \Sigma \cup \Phi} \wedge\mathrm{I}$$

$$\frac{\varphi \to \psi \texttt{ uit } \Sigma \quad \varphi \texttt{ uit } \Phi}{\psi \texttt{ uit } \Sigma \cup \Phi} \to\mathrm{E} \qquad \frac{\psi \texttt{ uit } \Gamma}{\varphi \to \psi \texttt{ uit } \Gamma - \{\varphi\}} \to\mathrm{I}$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \ \mathtt{uit}\ \Sigma \quad \alpha\ \mathtt{uit}\ \Gamma \quad \alpha\ \mathtt{uit}\ \Delta}{\alpha\ \mathtt{uit}\ \Sigma \cup (\Gamma - \{\varphi\}) \cup (\Delta - \{\psi\})} \vee \mathrm{E} \qquad \frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Sigma}{\varphi \vee \psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma} \vee \mathrm{I} \quad \frac{\psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma}{\varphi \vee \psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma} \vee \mathrm{I}$$

$$\frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Gamma \quad \neg\varphi\ \mathtt{uit}\ \Delta}{\psi\ \mathtt{uit}\ (\Gamma \cup \Delta) - \{\neg\psi\}} \neg\,\mathrm{E}^* \qquad \frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Gamma \quad \neg\varphi\ \mathtt{uit}\ \Delta}{\neg\psi\ \mathtt{uit}\ (\Gamma \cup \Delta) - \{\psi\}} \neg\,\mathrm{I}$$

$$\frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Sigma \quad \neg\varphi\ \mathtt{uit}\ \Phi}{\psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma \cup \Phi} \neg\,\mathrm{E}$$

Deze regels zien er iets anders uit dan die in het boek. Dat komt omdat we preciezer willen zijn dan het boek, waarin soms niet erg duidelijk is wat precies bedoeld wordt! In het boek wordt bijv. de afleidingsregel ($\rightarrow$I) ongeveer als volgt opgeschreven:

$$\frac{\psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma, \varphi}{\varphi \rightarrow \psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma} \rightarrow \mathrm{I} \ \ \text{(in het boek)}$$

Blijkbaar wordt daarbij met Σ, φ de verzameling $\Sigma \cup \{\varphi\}$ bedoeld, met de restrictie dat φ niet in Σ zit. Maar deze regel mag blijkbaar ook toegepast worden wanneer Σ, φ vervangen wordt door Σ, nog steeds onder de restrictie dat $\varphi \notin \Sigma$. Dat heet in Voorbeeld 4.9 de "lege intrekking" van de aanname φ. Wanneer we in het eerste geval $\Gamma = \Sigma \cup \{\varphi\}$ nemen en in het tweede geval $\Gamma = \Sigma$, dan komt onze regel ($\rightarrow$I) precies met deze twee gevallen overeen. Hetzelfde idee is gebruikt bij de regels ($\vee$E), ($\neg$E*) en ($\neg$I), die er in het boek ongeveer als volgt uit zien:

$$\frac{\varphi \vee \psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma \quad \alpha\ \mathtt{uit}\ \Phi, \varphi \quad \alpha\ \mathtt{uit}\ \Psi, \psi}{\alpha\ \mathtt{uit}\ \Sigma \cup \Phi \cup \Psi} \vee \mathrm{E} \ \ \text{(in het boek)}$$

$$\frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Sigma, \neg\psi \quad \neg\varphi\ \mathtt{uit}\ \Phi, \neg\psi}{\psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma \cup \Phi} \neg\,\mathrm{E}^* \ \ \text{(in het boek)} \quad \frac{\varphi\ \mathtt{uit}\ \Sigma, \psi \quad \neg\varphi\ \mathtt{uit}\ \Phi, \psi}{\neg\psi\ \mathtt{uit}\ \Sigma \cup \Phi} \neg\,\mathrm{I}$$

7 Definitie van afleiding, boomvormig en lineair

In het boek worden de begrippen afleiding, afleidingsboom, bewijs en bewijsboom als synoniemen gebruikt. We definieren een afleiding eerst als een boom, zoals in het boek, en dan geven we nog een daarmee equivalente definitie van afleiding als een lineaire rij van formules, of eigenlijk sequenten.

In het boek wordt een inductieve definitie van het begrip afleiding gegeven. Hier doen we het op een meer directe manier.

Laat φ een formule zijn, en Σ een verzameling formules. Een *boomvormige afleiding van φ uit Σ* is een boom waarvan iedere knoop een sequent is, en die aan de volgende voorwaarden voldoet: (1) de sequent $\varphi\ \mathtt{uit}\ \Sigma$ is de wortel van de boom, (2) ieder blad van de boom is een axioma, en (3) iedere knoop $\psi\ \mathtt{uit}\ \Psi$ met kinderen $\psi_1\ \mathtt{uit}\ \Psi_1, \ldots, \psi_k\ \mathtt{uit}\ \Psi_k$ $(k \geq 1)$ voldoet aan een afleidingsregel, d.w.z.

$$\frac{\psi_1\ \mathtt{uit}\ \Psi_1 \quad \ldots \quad \psi_k\ \mathtt{uit}\ \Psi_k}{\psi\ \mathtt{uit}\ \Psi}$$

is een instantie van een afleidingsregel. Net zoals in het boek schrijven we in geval (3) de naam van de betreffende afleidingsregel bij de knoop.

Het is eenvoudig in te zien dat in een afleiding iedere sequent $\psi\ \mathtt{uit}\ \Psi$ vervangen kan worden door ψ. Dat komt omdat de uit-informatie uniek bepaald wordt door de afleidingsregels, van de bladeren naar de wortel van de boom. Het nummeren en wegstrepen van aannames zoals dat in het boek gebeurt is een informele manier om de uit-informatie weg te laten om schrijfwerk te besparen, maar die informatie tijdens de constructie van de boom toch bij te houden om te zorgen dat de afleidingsregels correct worden toegepast.

Bewijzen hebben eigenlijk een structuur als van een acyclische gerichte graaf. Maar om die structuur naar anderen te communiceren is een boomstructuur of een lineaire structuur dikwijls het meest overzichtelijk. In wetenschappelijke boeken en artikelen worden bewijzen meestal lineair opgeschreven, omdat we nu eenmaal in lineair schrift met elkaar communiceren (vgl. blz. 47,48 van het boek).

Een *lineaire afleiding van φ uit Σ* is een rij sequenten

$$\varphi_1\ \mathtt{uit}\ \Sigma_1, \ldots, \varphi_n\ \mathtt{uit}\ \Sigma_n$$

die aan de volgende voorwaarden voldoet: (1) $\varphi_n = \varphi$ en $\Sigma_n = \Sigma$, (2) voor iedere i, $1 \leq i \leq n$, is de sequent $\varphi_i\ \mathtt{uit}\ \Sigma_i$ ófwel een axioma, ófwel het gevolg van eerdere sequenten volgens een afleidingsregel, d.w.z. er zijn getallen $i_1, \ldots, i_k < i$ zodat

$$\frac{\varphi_{i_1}\ \mathtt{uit}\ \Sigma_{i_1} \quad \ldots \quad \varphi_{i_k}\ \mathtt{uit}\ \Sigma_{i_k}}{\varphi_i\ \mathtt{uit}\ \Sigma_i}$$

een instantie van een afleidingsregel is.

Net zoals bij boomvormige afleidingen kan in een lineaire afleiding iedere φ `uit` Σ vervangen worden door alleen φ, en dan is het dus een rij formules. De uit-informatie is echter alleen uniek bepaald als de verantwoording van iedere formule wordt toegevoegd. Voor iedere sequent in een lineaire afleiding vermelden we daarom ook de verantwoording van die sequent: ófwel het woord 'aanname' als het een axioma is ófwel de naam van de gebruikte afleidingsregel met tussen haakjes de regelnummers $i_1, \ldots, i_k$ van de als premissen gebruikte sequenten. Om het lezen van deze verantwoordingen te vergemakkelijken nummeren we de sequenten in de afleiding.

We geven in Extra Sectie 9 voorbeelden van lineaire afleidingen. Nu laten we eerst zien dat de twee afleidingsbegrippen equivalent zijn, d.w.z. dat een boomvormige afleiding van φ uit Σ bestaat dan en slechts dan als een lineaire afleiding van φ uit Σ bestaat.

We merken eerst op dat iedere prefix φ_1 `uit` $\Sigma_1, \ldots, \varphi_i$ `uit` Σ_i $(1 \leq i \leq n)$ van een lineaire afleiding φ_1 `uit` $\Sigma_1, \ldots, \varphi_n$ `uit` Σ_n zelf ook een lineaire afleiding is, en dat de concatenatie (het achter elkaar zetten) van twee lineaire afleidingen ook weer een lineaire afleiding oplevert.

Uit een boomvormige afleiding is op eenvoudige wijze een lineaire afleiding te krijgen. Eerst ordenen we op willekeurige wijze de kinderen van iedere knoop. Op papier kunnen we gewoon de links-naar-rechts ordening gebruiken. Dan sommen we de knopen van de boom, of liever gezegd de corresponderende sequenten, lineair op in de LRW-volgorde, d.w.z. voor iedere knoop schrijven we eerst de deelbomen van de kinderen van links naar rechts op, en dan de knoop zelf. Officieel kan dit eenvoudig gedefinieerd worden met inductie naar de boomstructuur (het aantal knopen van de boom): als ψ `uit` Ψ de wortel van de boom is, met kinderen ψ_1 `uit` $\Psi_1, \ldots, \psi_k$ `uit` Ψ_k $(k \geq 0)$, en als voor iedere i $(1 \leq i \leq k)$ A_i een lineaire afleiding is van ψ_i uit Ψ_i, dan is de concatenatie $A_1, \ldots, A_k, \psi$ `uit` Ψ een lineaire afleiding van ψ uit Ψ. Merk op dat het geval $k = 0$ de basis van de inductie is: dan is de wortel van de boom ook een blad, en dus een axioma. Merk ook op dat met deze definitie het aantal sequenten van de lineaire afleiding gelijk is aan het aantal knopen van de boomvormige afleiding.

Uit een lineaire afleiding φ_1 `uit` $\Sigma_1, \ldots, \varphi_n$ `uit` Σ_n is ook heel eenvoudig een boomvormige afleiding te verkrijgen. Voor iedere prefix φ_1 `uit` $\Sigma_1, \ldots, \varphi_i$ `uit` Σ_i $(1 \leq i \leq n)$ definieren we een boomvormige afleiding van φ_i uit Σ_i, met inductie naar i. Als de sequent φ_i `uit` Σ_i een axioma is, dan voldoet de boom met φ_i `uit` Σ_i als enige knoop. Merk op dat dit met name geldt voor $i = 1$ (de basis van de inductie). Als φ_i `uit` Σ_i geen axioma is, dan zijn er getallen $i_1, \ldots, i_k < i$ zodat φ_i `uit` Σ_i de conclusie is van een afleidingsregel met premissen φ_{i_1} `uit` Σ_{i_1} en $\ldots$ en φ_{i_k} `uit` Σ_{i_k}. Volgens de inductieaanname zijn er bomen $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ die corresponderen met de prefixen van lengte $i_1, \ldots, i_k$. In dat geval voldoet de boom met wortel φ_i `uit` Σ_i en deelbomen $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$.

Ten slotte merken we op dat bovenstaand bewijs van de equivalentie van boomvormige en lineaire afleidingen ook geldt voor systemen met andere axiomas en afleidingsregels, dus bijvoorbeeld voor het systeem in Sectie 4.4 van het boek.

8 Afleidbaarheid

We geven nu de precieze versie van Definitie 4.1 (blz.60) van het boek: Een formule φ heet *afleidbaar* uit een verzameling aannames Σ als er een boomvormige of lineaire afleiding van φ uit Σ' bestaat, voor een $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Notatie: $\Sigma \vdash \varphi$. Uit deze definitie volgt direct de volgende uitspraak:

(U): Als $\Sigma \vdash \varphi$ en $\Sigma \subseteq \Delta$, dan $\Delta \vdash \varphi$.

Dat betekent dus dat een formule die afleidbaar is uit een bepaalde verzameling aannames, ook afleidbaar is uit een willekeurig grotere verzameling aannames. De 'U' staat voor 'uitbreiding' (van de aannames).

Het is eenvoudig in te zien dat de axiomas en afleidingsregels nu ook te interpreteren zijn als uitspraken over afleidbaarheid (waarbij ' `uit` ' vervangen wordt door '$\vdash$'), in de volgende zin. Ten eerste geldt $\varphi \vdash \varphi$ voor iedere formule φ, en dus, met (U), ook $\Sigma \vdash \varphi$ voor iedere $\varphi \in \Sigma$. Ten tweede gelden de volgende uitspraken, die we dezelfde naam geven als de corresponderende afleidingsregels:

($\wedge$E):	Als $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\Sigma \vdash \varphi$.
	Als $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$, dan $\Sigma \vdash \psi$.
($\wedge$I):	Als $\Sigma \vdash \varphi$ en $\Phi \vdash \psi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \varphi \wedge \psi$.
($\rightarrow$E):	Als $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ en $\Phi \vdash \varphi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \psi$.
($\rightarrow$I):	Als $\Gamma \vdash \psi$, dan $\Gamma - \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
($\vee$E):	Als $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$ en $\Gamma \vdash \alpha$ en $\Delta \vdash \alpha$,
	dan $\Sigma \cup (\Gamma - \{\varphi\}) \cup (\Delta - \{\psi\}) \vdash \alpha$.
($\vee$I):	Als $\Sigma \vdash \varphi$, dan $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$.
	Als $\Sigma \vdash \psi$, dan $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$.
($\neg$E*):	Als $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Delta \vdash \neg\varphi$, dan $(\Gamma \cup \Delta) - \{\neg\psi\} \vdash \psi$.
($\neg$I):	Als $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Delta \vdash \neg\varphi$, dan $(\Gamma \cup \Delta) - \{\psi\} \vdash \neg\psi$.
($\neg$E):	Als $\Sigma \vdash \varphi$ en $\Phi \vdash \neg\varphi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \psi$.

Als voorbeeld bewijzen we uitspraak ($\wedge$I). Stel dat $\Sigma \vdash \varphi$ en $\Phi \vdash \psi$. Dat wil zeggen dat er afleidingen van φ uit Σ' en van ψ uit Φ' zijn, met $\Sigma' \subseteq \Sigma$ en $\Phi' \subseteq \Phi$. Dan is er, door toepassing van de afleidingsregel ($\wedge$I), ook een afleiding van $\varphi \wedge \psi$ uit $\Sigma' \cup \Phi'$. Aangezien $\Sigma' \cup \Phi' \subseteq \Sigma \cup \Phi$, wil dat zeggen dat $\Sigma \cup \Phi \vdash \varphi \wedge \psi$. De bewijzen van de andere uitspraken zijn net zo simpel.

We zouden bovenstaande uitspraken eventueel kunnen opvatten als een inductieve definitie van $\Sigma \vdash \varphi$, waarbij de basis van de inductie gevormd wordt door alle $\varphi \vdash \varphi$. Dit is analoog aan (maar uiteraard ingewikkelder dan) de inductieve definitie van 'φ is een formule'. Een afleidingsboom voor $\Sigma \vdash \varphi$ is dan ook analoog aan de constructieboom van een formule. Maar: de afleidingsboom is niet uniek.

Dankzij uitspraak (U) gelden ook de volgende uitspraken (die meer overeenkomen met de afleidingsregels uit het boek):

($\to$I$'$): Als $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, dan $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

($\vee$E$'$): Als $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi$ en $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ en $\Psi \cup \{\psi\} \vdash \alpha$,
dan $\Sigma \cup \Phi \cup \Psi \vdash \alpha$.

($\neg$E$^{*\prime}$): Als $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi$ en $\Phi \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \psi$.

($\neg$I$'$): Als $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ en $\Phi \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \neg\psi$.

Als voorbeeld bewijzen we ($\to$I$'$). Stel dat $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Dan geldt volgens uitspraak ($\to$I) dat $(\Sigma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$. Omdat $(\Sigma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\} \subseteq \Sigma$, volgt nu uit (U) dat $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$. Merk op dat $(\Sigma \cup \{\varphi\}) - \{\varphi\}$ een echte deelverzameling van Σ is in het geval dat $\varphi \in \Sigma$. De bewijzen van de andere uitspraken gaan net zo.

9 Voorbeelden van lineaire afleidingen

We geven lineaire afleidingen voor de voorbeelden uit Hoofdstuk 4 van het boek. Ter verdere verhoging van de leesbaarheid zullen we lange aannames vaak afkorten. De gebruikte afkorting vermelden we dan achter het woord ‘aanname’.

Voorbeeld (blz.49). We beginnen met een lineaire afleiding die precies correspondeert met de redeneerstappen zoals die informeel beschreven worden op blz.47 (en 48) van het boek.

1.	$j \wedge p$	`uit` φ	aanname φ
2.	$j \to m$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$p \to w$	`uit` χ	aanname χ
4.	j	`uit` φ	$\wedge E(1)$
5.	m	`uit` φ, ψ	$\to E(2,4)$
6.	p	`uit` φ	$\wedge E(1)$
7.	w	`uit` φ, χ	$\to E(3,6)$
8.	$m \wedge w$	`uit` φ, ψ, χ	$\wedge I(5,7)$

Dit betekent dat de formule $m \wedge w$ afleidbaar is uit de aannames φ, ψ en χ. En dus geldt $j \wedge p,\ j \to m,\ p \to w \vdash m \wedge w$.

De afleidingsboom die bij bovenstaande lineaire afleiding hoort, volgens de hiervoor omschreven methode, is precies de boom die in het boek staat op blz.49 onderaan.

Voorbeeld (4.1). We laten zien dat $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$. De aanname $p \wedge (q \wedge r)$ korten we af als φ.

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` φ	$\wedge E(1)$
3.	$q \wedge r$	`uit` φ	$\wedge E(1)$
4.	q	`uit` φ	$\wedge E(3)$
5.	$p \wedge q$	`uit` φ	$\wedge I(2,4)$
6.	r	`uit` φ	$\wedge E(3)$
7.	$(p \wedge q) \wedge r$	`uit` φ	$\wedge I(5,6)$

De afleidingsboom die bij deze lineaire afleiding hoort, volgens de hiervoor omschreven methode, is precies de boom die in het boek staat.

Als we echter vanuit die boom een lineaire afleiding maken dan krijgen we

1.	$p \wedge (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` φ	$\wedge E(1)$
3.	$p \wedge (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname
4.	$q \wedge r$	`uit` φ	$\wedge E(3)$
5.	q	`uit` φ	$\wedge E(4)$
6.	$p \wedge q$	`uit` φ	$\wedge I(2,5)$
7.	$p \wedge (q \wedge r)$	`uit` φ	aanname
8.	$q \wedge r$	`uit` φ	$\wedge E(7)$
9.	r	`uit` φ	$\wedge E(8)$
10.	$(p \wedge q) \wedge r$	`uit` φ	$\wedge I(6,9)$

Voorbeeld (4.2). We bewijzen $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$.

1.	p	`uit` p	aanname
2.	$p \to q$	`uit` $p \to q$	aanname
3.	q	`uit` $p, p \to q$	$\to E(1,2)$
4.	$p \to (q \to r)$	`uit` φ	aanname φ
5.	$q \to r$	`uit` p, φ	$\to E(1,4)$
6.	r	`uit` $p, p \to q, \varphi$	$\to E(3,5)$
7.	$p \to r$	`uit` $p \to q, \varphi$	$\to I(6)$
8.	$(p \to q) \to (p \to r)$	`uit` φ	$\to I(7)$

Een afleiding van ψ `uit` Ψ is natuurlijk niet uniek. Bovenstaande afleiding is direct uit de bewijsboom in het boek gehaald, behalve dat de aanname p niet herhaald is. Merk op dat de `uit` -informatie precies bestaat uit de expliciete aannames op blz.54. De volgende afleiding is duidelijker gestructureerd.

1.	$p \to (q \to r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$p \to q$	`uit` $p \to q$	aanname
3.	p	`uit` p	aanname
4.	q	`uit` $p \to q, p$	$\to E(2,3)$
5.	$q \to r$	`uit` φ, p	$\to E(1,3)$
6.	r	`uit` $\varphi, p \to q, p$	$\to E(4,5)$
7.	$p \to r$	`uit` $\varphi, p \to q$	$\to I(6)$
8.	$(p \to q) \to (p \to r)$	`uit` φ	$\to I(7)$

De haken geven aan dat we (zoals in het boek staat uitgelegd) de hulpaanname $p \to q$ gebruiken om $p \to r$ af te leiden, en dat we daartoe de hulpaanname p gebruiken om r af te leiden. Dit zijn toepassingen van afleidingsregel ($\to$I).

Voorbeeld (4.3). We laten zien dat $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$.

1.	$p \to (q \to r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$p \wedge q$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	p	`uit` ψ	$\wedge E(2)$
4.	$q \to r$	`uit` φ, ψ	$\to E(1,3)$
5.	q	`uit` ψ	$\wedge E(2)$
6.	r	`uit` φ, ψ	$\to E(4,5)$
7.	$(p \wedge q) \to r$	`uit` φ	$\to I(6)$

Voorbeeld (4.4). We laten zien dat $(p \vee q) \to r \vdash (p \to r) \wedge (q \to r)$.

1.	$(p \vee q) \to r$	`uit` φ	aanname φ
2.	p	`uit` p	aanname
3.	$p \vee q$	`uit` p	$\vee I(2)$
4.	r	`uit` φ, p	$\to E(1,3)$
5.	$p \to r$	`uit` φ	$\to I(4)$
6.	q	`uit` q	aanname
7.	$p \vee q$	`uit` q	$\vee I(6)$
8.	r	`uit` φ, q	$\to E(1,7)$
9.	$q \to r$	`uit` φ	$\to I(8)$
10.	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	`uit` φ	$\wedge I(5,9)$

Voorbeeld (4.5). We laten zien dat $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash (p \vee q) \to r$.

1.	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$p \vee q$	`uit` $p \vee q$	aanname
3.	p	`uit` p	aanname
4.	$p \to r$	`uit` φ	$\wedge E(1)$
5.	r	`uit` φ, p	$\to E(3,4)$
6.	q	`uit` q	aanname
7.	$q \to r$	`uit` φ	$\wedge E(1)$
8.	r	`uit` φ, q	$\to E(6,7)$
9.	r	`uit` $\varphi, p \vee q$	$\vee E(2,5,8)$
10.	$(p \vee q) \to r$	`uit` φ	$\to I(9)$

De binnenste haken geven hier aan dat we r eerst uit de hulpaanname p en daarna uit de hulpaanname q bewijzen. Dan volgt r uit $p \vee q$ volgens afleidingsregel ($\vee$E).

Voorbeeld (4.6). We laten zien dat $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$.

1.	$p \to q$	`uit` $p \to q$	aanname
2.	$\neg q$	`uit` $\neg q$	aanname
3.	p	`uit` p	aanname
4.	q	`uit` $p \to q, p$	$\to E(1,3)$
5.	$\neg p$	`uit` $p \to q, \neg q$	$\neg I(2,4)$
6.	$\neg q \to \neg p$	`uit` $p \to q$	$\to I(5)$

De binnenste haak geeft aan dat we de hulpaanname p willen gebruiken om een tegenspraak af te leiden (in dit geval $\neg q$ en q). Dan concluderen we dat $\neg p$ geldt, met afleidingsregel ($\neg$I).

Voorbeeld (4.7). We laten eerst zien dat $\vdash \neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$.

1.	$\neg(p \vee q)$	uit φ	aanname φ
2.	p	uit p	aanname
3.	$p \vee q$	uit p	$\vee I(2)$
4.	$\neg p$	uit φ	$\neg I(1,3)$
5.	q	uit q	aanname
6.	$p \vee q$	uit q	$\vee I(5)$
7.	$\neg q$	uit φ	$\neg I(1,6)$
8.	$\neg p \wedge \neg q$	uit φ	$\wedge I(4,7)$
9.	$\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$	uit $\emptyset$	$\to I(8)$

We laten nu zien dat $\vdash (\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$. Dit is een nogal gekunsteld bewijs. Om $\neg(p \vee q)$ te bewijzen nemen we $p \vee q$ aan. Dan laten we zien dat zowel p als q tot een tegenspraak leidt. Maar om ($\vee$E) te kunnen toepassen moet dat wel dezelfde tegenspraak zijn. Daar is voor te zorgen met ($\neg$E) door bijvoorbeeld $\neg(p \vee q)$ te nemen, als tegenspraak met de aanname $p \vee q$.

1.	$\neg p \wedge \neg q$	uit φ	aanname φ
2.	$p \vee q$	uit $p \vee q$	aanname
3.	p	uit p	aanname
4.	$\neg p$	uit φ	$\wedge E(1)$
5.	$\neg(p \vee q)$	uit φ, p	$\neg E(3,4)$
6.	q	uit q	aanname
7.	$\neg q$	uit φ	$\wedge E(1)$
8.	$\neg(p \vee q)$	uit φ, q	$\neg E(6,7)$
9.	$\neg(p \vee q)$	uit $\varphi, p \vee q$	$\vee E(2,5,8)$
10.	$\neg(p \vee q)$	uit φ	$\neg I(2,9)$
11.	$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$	uit $\emptyset$	$\to I(10)$

Voorbeeld (4.8). We laten eerst zien dat $\vdash \neg\neg p \to p$.

1.	$\neg\neg p$	uit $\neg\neg p$	aanname
2.	$\neg p$	uit $\neg p$	aanname
3.	p	uit $\neg\neg p$	$\neg E^*(1,2)$
4.	$\neg\neg p \to p$	uit $\emptyset$	$\to I(3)$

We laten nu zien dat $\vdash p \to \neg\neg p$.

1.	p	uit p	aanname
2.	$\neg p$	uit $\neg p$	aanname
3.	$\neg\neg p$	uit p	$\neg I(1,2)$
4.	$p \to \neg\neg p$	uit $\emptyset$	$\to I(3)$

We laten ook nog zien dat $\vdash \neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$.

1.	$\neg(p \wedge q)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$\neg p$	`uit` $\neg p$	aanname
4.	$\neg p \vee \neg q$	`uit` $\neg p$	$\vee I(3)$
5.	p	`uit` ψ	$\neg E^*(2,4)$
6.	$\neg q$	`uit` $\neg q$	aanname
7.	$\neg p \vee \neg q$	`uit` $\neg q$	$\vee I(6)$
8.	q	`uit` ψ	$\neg E^*(2,7)$
9.	$p \wedge q$	`uit` ψ	$\wedge I(5,8)$
10.	$\neg p \vee \neg q$	`uit` φ	$\neg E^*(1,9)$
11.	$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$	`uit` $\emptyset$	$\to I(10)$

Voorbeeld (4.9). Ten slotte laten we zien dat $\vdash p \to (q \to p)$.

1.	p	`uit` p	aanname
2.	$q \to p$	`uit` p	$\to I(1)$
3.	$p \to (q \to p)$	`uit` $\emptyset$	$\to I(2)$

Hoofdstuk 5. Propositielogica: metatheorie

In dit hoofdstuk en de volgende hoofdstukken gebruiken we de notatie $\varphi \equiv \psi$ om aan te geven dat de formules φ en ψ logisch equivalent zijn, d.w.z. $\varphi \leftrightarrow \psi$ is een tautologie, ofwel $V(\varphi) = V(\psi)$ voor iedere waardering V.

10 Voorbeeld van formule-inductie

Definieer voor iedere formule φ:

$\ell(\varphi) =$ het aantal propositieletters in φ, en
$b(\varphi) =$ het aantal binaire operatoren in φ.

Bijvoorbeeld, $\ell((p \wedge \neg q) \to p) = 3$ en $b((p \wedge \neg q) \to p) = 2$.

Stelling. $\ell(\varphi) = b(\varphi) + 1$ voor iedere formule φ.

Bewijs. Basis. Voor $\varphi = p$, een propositieletter, geldt $\ell(p) = 1$ en $b(p) = 0$. Dus $\ell(p) = b(p) + 1$.

Inductiestap. Stel dat de bewering geldt voor de formules α en β (de inductiehypothese, IH). Dan geldt de bewering ook voor $\varphi = \neg\alpha$, $\varphi = \alpha \wedge \beta$, $\varphi = \alpha \vee \beta$, $\varphi = \alpha \to \beta$ en $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$, want voor $\varphi = \neg\alpha$ is

$$\ell(\varphi) = \ell(\neg\alpha) = \ell(\alpha) \overset{\text{IH}}{=} b(\alpha) + 1 = b(\neg\alpha) + 1 = b(\varphi) + 1$$

en voor $\varphi = \alpha \wedge \beta$ is

$$\begin{aligned}\ell(\varphi) = \ell(\alpha \wedge \beta) &= \ell(\alpha) + \ell(\beta) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} b(\alpha) + 1 + b(\beta) + 1 \\ &= (b(\alpha) + b(\beta) + 1) + 1 \\ &= b(\alpha \wedge \beta) + 1 \\ &= b(\varphi) + 1\end{aligned}$$

en evenzo voor de andere gevallen. □

Opmerking: Voor een boom waarvan iedere knoop hoogstens twee kinderen heeft geldt dat het aantal bladeren gelijk is aan het aantal knopen met twee kinderen plus 1. Bovenstaande stelling is in feite een speciaal geval van dit welbekende feit (dat formeel ook met inductie bewezen moet worden).

11 Over substitutie

De formule die ontstaat door ψ te substitueren voor ieder voorkomen van p in φ, wordt genoteerd als $[\psi/p]\varphi$. Hiervoor gelden de eigenschappen in Definitie 2.3 (op blz.17).

We willen nu bewijzen dat bij substitutie een tautologie altijd overgaat in een tautologie, bijv. de tautologie $\varphi = (p \vee q) \to (\neg p \to q)$ gaat door substitutie van $\psi = p \wedge q$ voor p over in de tautologie $[\psi/p]\varphi = ((p \wedge q) \vee q) \to (\neg(p \wedge q) \to q)$. Intuitief is dat wel duidelijk, maar we willen het formeel bewijzen.

We laten eerst zien dat de waarheidswaarde van een substitutie $[\psi/p]\varphi$ in twee stappen berekend kan worden: bereken eerst de waarheidswaarde w van ψ, en geef dan p de waarde w en bereken de waarheidswaarde van φ. In bovenstaand voorbeeld, als $V(p) = 1$ en $V(q) = 0$, dan is $V(\psi) = 0$ en dus is $V([\psi/p]\varphi) = W(\varphi)$ waarbij W de waardering is met $W(p) = V(\psi) = 0$ en $W(q) = V(q) = 0$.

Stelling (E1). Gegeven een waardering V, formules φ en ψ, en een propositieletter p. Laat W de waardering zijn die als volgt gedefinieerd is: $W(p) = V(\psi)$ en $W(q) = V(q)$ voor alle propositieletters $q \neq p$.
Dan geldt: $V([\psi/p]\varphi) = W(\varphi)$.

Bewijs. Met formule-inductie naar φ.

Basis. Voor $\varphi = p$ is $V([\psi/p]\varphi) = V([\psi/p]p) = V(\psi) = W(p) = W(\varphi)$. Voor $\varphi = q \neq p$ is $V([\psi/p]\varphi) = V([\psi/p]q) = V(q) = W(q) = W(\varphi)$.

Inductiestap. Hier maken we gebruik van de substitutie-eigenschappen in Definitie 2.3 (blz.17) en van de definitie van de semantiek van de propositielogica (zie Extra Sectie 1).

Voor $\varphi = \alpha \wedge \beta$ is $V([\psi/p]\varphi) =$

$$\begin{aligned}V([\psi/p](\alpha \wedge \beta)) &= V([\psi/p]\alpha \wedge [\psi/p]\beta) && \text{substitutie-eigenschap} \\ &= V([\psi/p]\alpha) \wedge V([\psi/p]\beta) && \text{semantiek} \\ &= W(\alpha) \wedge W(\beta) && \text{inductiehypothese} \\ &= W(\alpha \wedge \beta) && \text{semantiek} \\ &= W(\varphi).\end{aligned}$$

Analoog voor $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ en $\alpha \leftrightarrow \beta$. $\square$

Nu laten we zien dat een tautologie bij substitutie overgaat in een tautologie.

Stelling (E2). Gegeven formules φ en ψ, en een propositieletter p.
Als φ een tautologie is, dan is $[\psi/p]\varphi$ een tautologie.

Bewijs. Neem een willekeurige waardering V. Dan is $V([\psi/p]\varphi) = W(\varphi) = 1$ volgens Stelling E1 en het feit dat φ een tautologie is. Dus is $[\psi/p]\varphi$ een tautologie. $\square$

Hieruit volgt ook dat logische equivalentie bestand is tegen substitutie: als $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, dan $[\psi/p]\varphi_1 \equiv [\psi/p]\varphi_2$. We willen nu nog laten zien dat een subformule altijd vervangen mag worden door een logisch equivalente subformule.

Stelling (E3). Als $\psi_1 \equiv \psi_2$, dan $[\psi_1/p]\varphi \equiv [\psi_2/p]\varphi$.

Bewijs. Voor een willekeurige waardering V geldt volgens Stelling E1 dat, voor $i = 1,2$, $V([\psi_i/p]\varphi) = W_i(\varphi)$ met $W_i(p) = V(\psi_i)$ en $W_i(q) = V(q)$ voor $q \neq p$. Omdat $V(\psi_1) = V(\psi_2)$, is $W_1 = W_2$ en dus $V([\psi_1/p]\varphi) = W_1(\varphi) = W_2(\varphi) = V([\psi_2/p]\varphi)$. $\square$

Hieruit volgt bijvoorbeeld dat als $\psi_1 \equiv \psi_2$, dan $\neg(\psi_1 \wedge \chi) \equiv \neg(\psi_2 \wedge \chi)$: neem $\varphi = \neg(p \wedge \chi)$ waarbij p niet in χ voorkomt; dan volgt uit Stelling E3 dat $\neg(\psi_1 \wedge \chi) = [\psi_1/p](\neg(p \wedge \chi)) \equiv [\psi_2/p](\neg(p \wedge \chi)) = \neg(\psi_2 \wedge \chi)$.

Tenslotte merken we op dat de in deze sectie bewezen substitutiewetten niet specifiek voor de logica zijn. Ze gelden voor willekeurige uitdrukkingen (zoals rekenkundige of verzamelingtheoretische) die met behulp van variabelen en operatoren zijn opgebouwd, zolang als de gebruikte operatoren maar geen "zij-effecten" hebben.

12 Dualiteit

Het bewijs van de dualiteitsstelling in het boek (Stelling 5.2, blz.73) is niet erg precies. Met Stellingen E2 en E3 kunnen we die stelling nu preciezer bewijzen.

Stelling (5.2). Laat φ, ψ formules zijn waarin alleen de connectieven $\wedge, \vee, \neg$ voorkomen.
Als $\varphi \equiv \psi$, dan $\varphi^{\mathrm{d}} \equiv \psi^{\mathrm{d}}$.

Bewijs. Laat, voor een formule χ, χ^{n} de formule zijn die uit χ ontstaat door ieder atoom p te vervangen door $\neg p$ (dus in het boek: $\chi^{+} = \chi^{\mathrm{dn}} = \chi^{\mathrm{nd}}$ en $\chi^{+\,\prime} = \chi^{\mathrm{dnn}}$). Met andere woorden, $\chi^{\mathrm{n}} = [\neg p_1/p_1][\neg p_2/p_2]\cdots[\neg p_k/p_k]\chi$, waarbij $p_1, \ldots, p_k$ de propositieletters zijn die in χ voorkomen. Uit Stelling E2 volgt: als $\models \chi$ dan $\models \chi^{\mathrm{n}}$. En dus in het bijzonder (voor $\chi = \alpha \leftrightarrow \beta$)

$$\text{als } \alpha \equiv \beta \text{ dan } \alpha^{\mathrm{n}} \equiv \beta^{\mathrm{n}}. \tag{1}$$

Aangezien $\chi^{\mathrm{nn}} = [\neg\neg p_1/p_1][\neg\neg p_2/p_2]\cdots[\neg\neg p_k/p_k]\chi$ en $\neg\neg p \equiv p$, volgt uit Stelling E3 (en Stelling E2) dat

$$\chi^{\mathrm{nn}} \equiv \chi. \tag{2}$$

Verder geldt Bewering 5.2 uit het boek:

$$\neg\chi \equiv \chi^{\mathrm{dn}}. \tag{3}$$

Intuitief: uit $\neg\chi$ onstaat χ^{dn} door herhaalde toepassing van de wetten van De Morgan. Bijvoorbeeld, als $\chi = \neg p \vee (p \wedge q)$ dan is $\neg\chi = \neg(\neg p \vee (p \wedge q)) \equiv \neg\neg p \wedge \neg(p \wedge q) \equiv \neg\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q) = \chi^{\mathrm{dn}}$, zie Voorbeeld 5.2 (blz.72). Het bewijs van Bewering 5.2 in het boek is goed, maar maakt stilzwijgend gebruik van Stelling E3: als $\alpha^+ \equiv \neg\alpha$ dan $\neg(\alpha^+) \equiv \neg\neg\alpha$, en als $\alpha^+ \equiv \neg\alpha$ en $\beta^+ \equiv \neg\beta$ dan $\alpha^+ \vee \beta^+ \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Stel nu dat $\varphi \equiv \psi$. Dan geldt $\neg\varphi \equiv \neg\psi$ volgens Stelling E3. Dus $\varphi^{\mathrm{dn}} \equiv \psi^{\mathrm{dn}}$ volgens (3). Dus $\varphi^{\mathrm{dnn}} \equiv \psi^{\mathrm{dnn}}$ volgens (1) en $\varphi^{\mathrm{d}} \equiv \psi^{\mathrm{d}}$ volgens (2). □

13 Volledigheid

Het bewijs van de volledigheid van de propositielogica in het boek (Stelling 5.4b, blz.77) is intuitief niet erg inzichtelijk. We geven daarom hier een ander bewijs. Daarna geven we nóg een bewijs, dat later gegeneraliseerd kan worden voor de predikaatlogica.

We zullen gebruik maken van de eigenschappen van afleidbaarheid (d.w.z. van $\vdash$) zoals die geformuleerd zijn in Extra Sectie 8. Bijvoorbeeld de eigenschap ($\to$E) is: als $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ en $\Phi \vdash \varphi$, dan $\Sigma \cup \Phi \vdash \psi$. Denk er ook aan dat $\Sigma \vdash \varphi$ voor iedere $\varphi \in \Sigma$.

Stelling (5.4b). Gegeven een verzameling formules Σ en een formule φ.
Als $\Sigma \models \varphi$ dan $\Sigma \vdash \varphi$.

Eerste Bewijs We laten de stelling eerst zien voor formuleverzamelingen Σ die alleen atomen en genegeerde atomen bevatten, en die voor ieder atoom p dat in φ voorkomt ófwel p ófwel $\neg p$ bevatten. Dergelijke formuleverzamelingen komen overeen met waarderingen van de atomen van φ, als volgt.

Definieer voor een waardering V van de atomen van φ de formuleverzameling $\Sigma_V = \{p \mid V(p) = 1\} \cup \{\neg p \mid V(p) = 0\}$. Dus, bijvoorbeeld, als $V(p) = 1$, $V(q) = 0$ en $V(r) = 0$, dan is $\Sigma_V = \{p, \neg q, \neg r\}$.

Het is eenvoudig in te zien dat $\Sigma_V \models \varphi$ hetzelfde betekent als $V(\varphi) = 1$.

Bewering (E4). Als $V(\varphi) = 1$ dan $\Sigma_V \vdash \varphi$.

Bewijs. We bewijzen dit met formule-inductie naar φ, maar dat lukt alleen als we tegelijkertijd ook bewijzen dat als $V(\varphi) = 0$ dan $\Sigma_V \vdash \neg\varphi$ (merk op dat als we Bewering (E4) al zouden weten, dit eruit zou volgen: als $V(\varphi) = 0$ dan $V(\neg\varphi) = 1$ en dus $\Sigma_V \vdash \neg\varphi$). Iets dergelijks komt vaak voor bij inductiebewijzen:

het inductiebewijs lukt niet met de uitspraak die je wilt bewijzen, maar lukt wel voor een sterkere uitspraak.

We bewijzen nu dus met formule-inductie naar φ dat

als $V(\varphi) = 1$ dan $\Sigma_V \vdash \varphi$, en
als $V(\varphi) = 0$ dan $\Sigma_V \vdash \neg\varphi$.

Basis: $\varphi = p$. Als $V(p) = 1$, dan zit p in Σ_V en dus geldt $\Sigma_V \vdash p$. Evenzo, als $V(p) = 0$, dan zit $\neg p$ in Σ_V en dus geldt $\Sigma_V \vdash \neg p$.

Inductiestap:

- $\varphi = \neg\alpha$. Als $V(\varphi) = 1$, dan is $V(\alpha) = 0$ en dus $\Sigma_V \vdash \neg\alpha$ $(= \varphi)$ volgens het tweede gedeelte van de IH (inductiehypothese). Evenzo, als $V(\varphi) = 0$ dan is $V(\alpha) = 1$ en dus $\Sigma_V \vdash \alpha$ volgens het eerste gedeelte van de IH; aangezien $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$, geldt met ($\to$E) ook dat $\Sigma_V \vdash \neg\neg\alpha$ $(= \neg\varphi)$.
- $\varphi = \alpha \wedge \beta$. Als $V(\alpha \wedge \beta) = 1$, dan is $V(\alpha) = 1$ en $V(\beta) = 1$. Dus, volgens de IH geldt $\Sigma_V \vdash \alpha$ en $\Sigma_V \vdash \beta$. Uit ($\wedge$I) volgt dan dat $\Sigma_V \vdash \alpha \wedge \beta$.
  Als $V(\alpha \wedge \beta) = 0$, dan is $V(\alpha) = 0$ of $V(\beta) = 0$. Stel dat $V(\alpha) = 0$. Dan (IH) $\Sigma_V \vdash \neg\alpha$ en dus met ($\vee$I): $\Sigma_V \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$. Uit de tweede wet van De Morgan, $\vdash (\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$, volgt nu met ($\to$E) dat $\Sigma_V \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$. Het geval dat $V(\beta) = 0$ gaat analoog.
- $\varphi = \alpha \vee \beta$. Dit geval gaat analoog aan het vorige geval, met de eerste wet van De Morgan.
- $\varphi = \alpha \to \beta$. Uit de vorige gevallen volgt dat de twee beweringen gelden voor $\varphi = \neg\alpha \vee \beta$. Dus, omdat $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$: als $V(\varphi) = 1$ dan $\Sigma_V \vdash \neg\alpha \vee \beta$. Aangezien $\vdash (\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$, geldt met ($\to$E) ook $\Sigma_V \vdash \alpha \to \beta$. Het geval $V(\varphi) = 0$ gaat analoog met $\vdash \neg(\neg\alpha \vee \beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$.

□

We hebben nog de volgende eenvoudige bewering nodig, over geval-onderscheiding met het Uitgesloten Derde. Deze bewering volgt uit $\vdash p \vee \neg p$ en ($\vee$E$'$).

Bewering (E5). Als $\Sigma \cup \{p\} \vdash \varphi$ en $\Sigma \cup \{\neg p\} \vdash \varphi$, dan $\Sigma \vdash \varphi$.

We gaan nu de stelling bewijzen met een lege formuleverzameling.

Bewering (E6). Als $\models \varphi$ dan $\vdash \varphi$.

Bewijs. Stel dat φ een tautologie is. Dan volgt uit Bewering E4 dat $\Sigma_V \vdash \varphi$ voor iedere waardering V van de propositieletters $p_1, \ldots, p_k$ die in φ voorkomen. Voor een waardering W van $p_1, \ldots, p_{k-1}$ geldt dan dat $\Sigma_W \cup \{p_k\} \vdash \varphi$ en $\Sigma_W \cup \{\neg p_k\} \vdash \varphi$, en volgens Bewering E5 dus dat $\Sigma_W \vdash \varphi$. Met andere woorden: $\Sigma_V \vdash \varphi$ voor iedere waardering V van $p_1, \ldots, p_{k-1}$. Op dezelfde wijze (officieel met inductie naar $k - i + 1$) kan voor alle i, $1 \leq i \leq k$, bewezen worden dat $\Sigma_V \vdash \varphi$ voor iedere waardering V van $p_1, \ldots, p_i$. Voor $i = 1$ krijgen we dan dat $p_1 \vdash \varphi$ en $\neg p_1 \vdash \varphi$. En dus, weer volgens Bewering E5: $\vdash \varphi$. □

We bewijzen nu Stelling 5.4b. Stel dat $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$. Dan geldt ook dat $\models (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ (zie Opgave 3.2). Dus, volgens Bewering E6, geldt dat $\vdash (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$. Uit ($\wedge$I) volgt dat $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$. Dus, met ($\to$E), $\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \varphi$.

Merk op dat dit een constructief (meta-)bewijs is (in tegenstelling tot het bewijs in het boek): als $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$, dan kunnen we daaruit een bewijs van φ uit $\psi_1, \dots, \psi_n$ construeren, volgens de aanwijzingen in het meta-bewijs.

Tweede Bewijs We geven nóg een bewijs van Stelling 5.4b, dat ook bruikbaar zal zijn voor de predikaatlogica. We hebben de "transitiviteit" van afleidbaarheid nodig, zoals geformuleerd in de volgende stelling.

Stelling (E7). Als $\Phi \vdash \psi$ voor iedere formule $\psi \in \Psi$, en $\Phi \cup \Psi \vdash \chi$, dan $\Phi \vdash \chi$.

Bewijs. Voor het gemak bewijzen we dit voor het geval dat $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Het algemene geval gaat net zo. Uit $\Phi \cup \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} \vdash \chi$ volgt, door drie keer ($\to$I) toe te passen, dat $\Phi \vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\psi_3 \to \chi))$. Dan volgt uit $\Phi \vdash \psi_i$ (voor $i = 1, 2, 3$), door drie keer ($\to$E) toe te passen, dat $\Phi \vdash \chi$. □

Uit de Adequaatheidsstelling voor semantische tableaus (Stelling 5.3, blz.75) weten we: als $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$, dan is er een gesloten semantisch tableau voor de sequent $\psi_1, \dots, \psi_n \circ \varphi$. Dan volgt Stelling 5.4b direct uit de volgende bewering (die iets algemener is, omdat anders het inductiebewijs niet werkt).

Bewering (E8). Gegeven formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ en $\psi_1, \dots, \psi_m$.
Als er een gesloten semantisch tableau bestaat voor $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$, dan geldt $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$.

Bewijs. Het bewijs is met inductie naar het aantal knopen van het (gesloten) semantisch tableau.

Basis: het tableau heeft één knoop. Sluiting betekent dat er i en j zijn met $\varphi_i = \psi_j$. Dan geldt $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi_j$ en dus $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$ met ($\vee$I).

Inductiestap. We bekijken systematisch alle mogelijkheden voor de reductieregel die bij de wortel van de boom is toegepast. Iedere subboom die aan een kind van de wortel hangt vormt ook een gesloten semantisch tableau, en omdat zo'n subboom minder knopen heeft dan de hele boom, mogen we daar de inductiehypothese op toepassen (zie het plaatje op blz.74).

Stel dat $\wedge_{\mathrm{L}}$ de bovenste reductieregel is:

$$\begin{array}{c} \Phi, \alpha \wedge \beta \circ \Psi \\ | \\ \Phi, \alpha, \beta \circ \Psi \end{array}$$

Volgens de IH geldt dan dat $\Phi, \alpha, \beta \vdash \psi$, waarbij ψ de disjunctie is van de formules in Ψ. Uit ($\wedge$E) volgt dat $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ en $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$. Uit $\Phi, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ en $\Phi, \alpha \wedge \beta \vdash \beta$ en $\Phi, \alpha \wedge \beta, \alpha, \beta \vdash \psi$ volgt nu met Stelling E7 dat $\Phi, \alpha \wedge \beta \vdash \psi$.

Stel nu dat $\wedge_{\mathrm{R}}$ de bovenste reductieregel is:

$$\begin{array}{ccc} & \Phi \circ \alpha \wedge \beta, \Psi & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Phi \circ \alpha, \Psi & & \Phi \circ \beta, \Psi \end{array}$$

Volgens de IH geldt $\Phi \vdash \alpha \vee \psi$ én $\Phi \vdash \beta \vee \psi$. Aangezien $\alpha \vee \psi, \beta \vee \psi \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \psi$ (zie Opgave 4.3(i)), volgt nu uit Stelling E7 dat $\Phi \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \psi$.

Als $\vee_{\mathrm{L}}$ de bovenste reductieregel is, dan krijgen we uit de IH dat $\Phi, \alpha \vdash \psi$ en $\Phi, \beta \vdash \psi$. Uit ($\vee$E) volgt dan dat $\Phi, \alpha \vee \beta \vdash \psi$ (omdat natuurlijk ook $\alpha \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta$).

Als $\vee_{\mathrm{R}}$ de bovenste reductieregel is, dan valt er niets te bewijzen omdat de disjunctie van α, β en ψ hetzelfde is als de disjunctie van $\alpha \vee \beta$ en ψ (maar zie later).

De reductieregels voor $\neg$ en $\rightarrow$ gaan analoog, waarbij ook ($\rightarrow$I) nodig is om bijvoorbeeld uit $\Phi, \alpha \vdash \psi$ te concluderen dat $\Phi \vdash \alpha \rightarrow \psi$. Netzoals we bij $\wedge_{\mathrm{L}}$ gebruik hebben gemaakt van $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ en $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$ en bij $\wedge_{\mathrm{R}}$ van $\alpha \vee \psi, \beta \vee \psi \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee \psi$, hebben we in de overige gevallen de volgende gevolgtrekkingen nodig:

$$\begin{array}{ll} \neg_{\mathrm{L}}: & \alpha \vee \psi, \neg\alpha \vdash \psi \\ \neg_{\mathrm{R}}: & \alpha \rightarrow \psi \vdash \neg\alpha \vee \psi \\ \rightarrow_{\mathrm{L}}: & \alpha \vee \psi, \beta \rightarrow \psi, \alpha \rightarrow \beta \vdash \psi \\ \rightarrow_{\mathrm{R}}: & \alpha \rightarrow (\beta \vee \psi) \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \vee \psi \end{array}$$

Maar in dit bewijs zitten nog twee gaten. Ten eerste kan het zijn dat $\Psi = \emptyset$, d.w.z. dat $m = 0$. In dat geval nemen we $p \wedge \neg p$ (d.w.z. false) voor de disjunctie ψ. Dan hebben we nodig dat $\vdash \alpha \leftrightarrow (\alpha \vee (p \wedge \neg p))$. Ten tweede hebben we er geen rekening mee gehouden hoe we de verzameling $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ precies omzetten in een disjunctie $\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$: we kunnen de volgorde kiezen, het aantal keren dat een ψ_i in de disjunctie voorkomt, en de precieze haakjesstructuur. Uit Opgave 5.9 (met Stelling E2) volgt dat dat in orde is. $\square$

Hoofdstuk 8. Predikaatlogica: eenvoudige theorie

Hier behandelen we nog meer over substitutie en de toepassingen daarvan.

14 Substitutie voor predikaatletters

Een formule ψ met vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$ definieert intuitief een n-aire relatie op het domein D van een model M. Bijvoorbeeld, als R de relatie "vader van" is, dan definieert de formule $\psi = \exists y(Rx_1y \wedge Ryx_2)$ de relatie "grootvader van vaders kant van" (zie Opgave 6.7(b)). In database-terminologie heet zo'n formule ook een "query": als de database van het dorpje M alle paren (v, k) bevat zodat v vader is van k, dan levert de query ψ op die database (bijv. ingetikt door de ambtenaar van de burgelijke stand van M) alle paren (g, p) op zodat g de grootvader, van vaders kant, van p is.

Laten we de door ψ in M gedefinieerde relatie $\mathrm{rel}_M(\psi)$ noemen, dus $\mathrm{rel}_M(\psi) \subseteq D^n$. De formele definitie luidt als volgt, waarbij we met $[x_1 \mapsto d_1] \cdots [x_n \mapsto d_n]$ een bedeling b bedoelen met $b(x_i) = d_i$ voor $1 \leq i \leq n$:

$$\mathrm{rel}_M(\psi) = \{(d_1, \ldots, d_n) \in D^n \mid V_{M,[x_1 \mapsto d_1] \cdots [x_n \mapsto d_n]}(\psi) = 1\}.$$

Merk op dat voor twee zulke formules ψ_1 en ψ_2, $\psi_1 \equiv \psi_2$ dan en slechts dan als $\mathrm{rel}_M(\psi_1) = \mathrm{rel}_M(\psi_2)$ voor ieder model M (dit volgt direct uit de definities, met behulp van Bewering 7.1 op blz.111).

Het ligt nu voor de hand om zo'n formule ψ te substitueren voor een n-aire predikaatletter P.

Definitie (*Substitutie).* Laat φ een formule zijn, ψ een formule met vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$, en P een n-aire predikaatletter. Dan is $[\psi/P]\varphi$ de formule die ontstaat uit φ door elk voorkomen van een atomaire subformule $P(t_1, \ldots, t_n)$ in φ te vervangen door de formule $[t_1/x_1] \cdots [t_n/x_n]\psi$. We nemen daarbij aan dat t_i vrij is voor x_i in ψ.

De volgende stelling is analoog aan Stelling E1.

Stelling (E9). Gegeven een model $M = (D, I)$ en een bedeling b. Laat $M' = (D, I')$ het model zijn dat als volgt gedefinieerd is: $I'(P) = \mathrm{rel}_M(\psi)$ en $I'(X) = I(X)$ voor alle $X \neq P$.
Dan geldt: $V_{M,b}([\psi/P]\varphi) = V_{M',b}(\varphi)$.

Bewijs. Met formule-inductie naar φ. Aangezien de inductiestap vrij simpel is, analoog aan het bewijs van Stelling E1, laten we alleen de basis van de inductie zien. Als $\varphi = Q(t_1, \ldots, t_m)$ met $Q \neq P$, dan is $[\psi/P]\varphi = \varphi$. En dan is $V_{M,b}(\varphi) = V_{M',b}(\varphi)$ omdat M en M' alleen verschillen op P, en P niet in φ voorkomt (analoog aan Bewering 7.1, blz.111).

Bekijk nu het geval dat $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Dan is $[\psi/P]\varphi = [t_1/x_1] \cdots [t_n/x_n]\psi$ en dus geldt volgens Bewering 8.2 (blz.122), n keer toegepast, dat

$$V_{M,b}([\psi/P]\varphi) = V_{M,b[x_1 \mapsto V_{M,b}(t_1)] \cdots [x_n \mapsto V_{M,b}(t_n)]}(\psi).$$

Volgens Bewering 7.1 en de definitie van $\mathrm{rel}_M(\psi)$ is dit gelijk aan 1 dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (V_{M,b}(t_1), \ldots, V_{M,b}(t_n)) \in \mathrm{rel}_M(\psi) \\ &\Leftrightarrow I'(P)(V_{M,b}(t_1), \ldots, V_{M,b}(t_n)). \end{aligned}$$

Omdat M en M' alleen verschillen op P, en P niet voorkomt in t_i, is dit

$$\Leftrightarrow I'(P)(V_{M',b}(t_1), \ldots, V_{M',b}(t_n))$$

en volgens Definitie 7.5(a) (blz.108)

$$\Leftrightarrow V_{M',b}(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1.$$

Dus $V_{M,b}([\psi/P]\varphi) = V_{M',b}(P(t_1, \ldots, t_n)) = V_{M',b}(\varphi)$. □

Nu gelden, geheel analoog aan Stellingen E2 en E3, de volgende stellingen.

Stelling (E10). Als $\models \varphi$ dan $\models [\psi/P]\varphi$.
In het bijzonder, als $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ dan $[\psi/P]\varphi_1 \equiv [\psi/P]\varphi_2$.

Stelling (E11). Als $\psi_1 \equiv \psi_2$ dan $[\psi_1/P]\varphi \equiv [\psi_2/P]\varphi$.

En daaruit volgt dat een subformule altijd vervangen mag worden door een logisch equivalente subformule: Stel dat χ_2 uit χ_1 ontstaat door een voorkomen van subformule ψ_1 te vervangen door de logisch equivalente formule ψ_2. Laat nu φ de formule zijn die uit χ_1 ontstaat door datzelfde voorkomen van ψ_1 te vervangen door $Px_1 \cdots x_n$, waarbij P een "nieuwe" predikaatletter is (d.w.z. dat P niet in χ_1 voorkomt) en $x_1, \ldots, x_n$ de vrije variabelen van ψ_1 zijn. Dan is het duidelijk dat $[\psi_1/P]\varphi = \chi_1$ en $[\psi_2/P]\varphi = \chi_2$. En dus $\chi_1 \equiv \chi_2$ volgens Stelling E11.

15 Alfabetische varianten

In het boek wordt de notie *alfabetische variant* van een formule op een informele manier geïntroduceerd: een alfabetische variant ontstaat door gebonden variabelen door "nieuwe" te vervangen. We geven hier een formele definitie. Allereerst geven we daartoe een iets preciezere versie van Definitie 6.6 (blz.97) uit het boek:

Een term t heet *vrij voor een variabele x in een formule φ* als geen vrij voorkomen van x in φ valt binnen het bereik van een kwantor $\forall y$ of $\exists y$ in φ voor enige variabele y uit t.

Beschouw nu eerst de formule $\forall x\, \varphi$ en de variabele $y \neq x$, zodat

(1) y is niet vrij in φ, en
(2) y is vrij voor x in φ.

De formule $\forall y\, [y/x]\varphi$ heet dan een *directe alfabetische variant* van de formule $\forall x\, \varphi$. Hetzelfde geldt voor het analoge geval van de formules $\exists y\, [y/x]\varphi$ en $\exists x\, \varphi$.

Een *alfabetische variant* van een formule ontstaat door, eventueel herhaald, een of meer van zijn subformules van de vorm $\forall x\, \varphi$ of $\exists x\, \varphi$ te vervangen door een directe alfabetische variant van zo'n subformule.

We laten nu zien dat een alfabetische variant van een formule logisch equivalent is met die formule. We beginnen met directe alfabetische varianten.

Stelling (E12). Laat $y \neq x$ een variabele zijn zodat
(1) y is niet vrij in φ, en (2) y is vrij voor x in φ.
Dan geldt $\forall x\, \varphi \equiv \forall y [y/x]\varphi$.

Bewijs. We moeten bewijzen dat voor alle M en b geldt:

$$V_{M,b}(\forall x\, \varphi) = V_{M,b}(\forall y [y/x]\varphi).$$

Volgens de waarheidsdefinitie van $\forall$ (Definitie 7.5(d), blz.108) volstaat het dus te bewijzen dat voor iedere $d \in D$ geldt:

$$V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi) = V_{M,b[y\mapsto d]}([y/x]\varphi).$$

Nu geldt volgens Bewering 8.2 (blz.122) en aanname (2):

$$\begin{aligned} V_{M,b[y\mapsto d]}([y/x]\varphi) &= V_{M,b[y\mapsto d][x\mapsto V_{M,b[y\mapsto d]}(y)]}(\varphi) \\ &= V_{M,b[y\mapsto d][x\mapsto d]}(\varphi) \end{aligned}$$

en volgens Bewering 7.1 (blz.111) en aanname (1) is dit gelijk aan $V_{M,b[x\mapsto d]}(\varphi)$.
□

Analoog geldt dit voor $\exists x\,\varphi$ en $\exists y[y/x]\varphi$.

De volgende stelling volgt nu direct uit Stelling E12 en de discussie die op Stelling E11 volgt.

Stelling (E13). Als φ' een alfabetische variant van φ is, dan zijn φ' en φ logisch equivalent.

Deze stelling wordt gebruikt in het bewijs van de Prenexstelling (Stelling 8.1, blz.125).

16 Dualiteit

De duale formule van φ (notatie φ^{d}) ontstaat uit φ door $\vee, \wedge, \exists, \forall$ te vervangen door, respectievelijk, $\wedge, \vee, \forall, \exists$. Geheel analoog aan Stelling 5.2 is nu ook voor de predikaatlogica te bewijzen: als $\varphi \equiv \psi$, dan $\varphi^{\mathrm{d}} \equiv \psi^{\mathrm{d}}$. Bijvoorbeeld, uit $\forall x\, Rx \equiv \neg\exists x \neg Rx$ volgt dat $\exists x\, Rx \equiv \neg\forall x \neg Rx$, en uit $(\exists x\,\varphi) \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$ (zie Lemma 8.1) volgt dat $(\forall x\,\varphi) \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$.

Het bewijs van deze dualiteitsstelling is analoog aan het bewijs in Extra Sectie 12. Daarbij is χ^{n} de formule die uit χ ontstaat door iedere atomaire subformule $Pt_1 \cdots t_n$ te vervangen door $\neg Pt_1 \cdots t_n$. Dat komt overeen met de substitutie $[\psi/P]$ waarbij $\psi = \neg Px_1 \cdots x_n$.

Hoofdstuk 9. Predikaatlogica: semantische tableaus

17 Precieze reductieregels

Voor iedere sequent $\Phi \circ \Psi$ in een semantisch tableau moet de volgende informatie bijgehouden worden:

1. de tot nu toe ingevoerde constanten: $\{d_1, \ldots, d_k\}$, en
2. voor iedere universele formule in Φ en iedere existentiele formule in Ψ: op welke $\{d_1, \ldots, d_m\}$, $m \leq k$, de reductieregel $\forall_{\mathrm{L}}$ respectievelijk $\exists_{\mathrm{R}}$ al is toegepast voor die formule.

De sequent "sluit" als er een formule is die zowel in Φ als in Ψ staat. De sequent "termineert open" als hij niet sluit en iedere formule in Φ ófwel een atomaire formule is, ófwel een universele formule waarvoor $\forall_{\mathrm{L}}$ is toegepast op alle $\{d_1, \ldots, d_k\}$, en analoog voor Ψ (met $\exists_{\mathrm{R}}$). De constructie van een semantisch tableau eindigt als iedere blad-sequent sluit (en dan is de gevolgtrekking geldig) of als er een blad-sequent is die open termineert (en dan is er een tegenvoorbeeld gevonden en is de gevolgtrekking niet geldig). Als de constructie niet eindigt dan is de gevolgtrekking ook niet geldig (mits er fair scheduling is toegepast, zie hieronder).

De reductieregels $\exists_{\mathrm{L}}$ en $\forall_{\mathrm{L}}$ zien er dan zó uit:

$$
\exists_{\mathrm{L}}: \qquad
\begin{array}{rl}
\Phi, \exists x\, \varphi \circ \Psi & \begin{array}{l}(1)\ \{d_1, \ldots, d_k\} \\ (2)\ \ldots\ldots\end{array} \\
| & \\
\Phi, [d_{k+1}/x]\varphi \circ \Psi & \begin{array}{l}(1)\ \{d_1, \ldots, d_k, d_{k+1}\} \\ (2)\ \ldots \text{idem} \ldots\end{array}
\end{array}
$$

en

$$
\forall_{\mathrm{L}}: \qquad
\begin{array}{rl}
\Phi, \forall x\, \varphi \circ \Psi & \begin{array}{l}(1)\ \{d_1, \ldots, d_k\} \\ (2)\ \forall x\, \varphi : \{d_1, \ldots, d_m\} \qquad (m < k) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\end{array} \\
| & \\
\Phi, \forall x\, \varphi, [d_{m+1}/x]\varphi, \ldots, [d_k/x]\varphi \circ \Psi & \begin{array}{l}(1)\ \{d_1, \ldots, d_k\} \\ (2)\ \forall x\, \varphi : \{d_1, \ldots, d_k\} \\ \qquad \ldots \text{idem} \ldots\end{array}
\end{array}
$$

Merk op dat bij toepassing van $\exists_{\mathrm{L}}$ de formule $\exists x\, \varphi$ uit de sequent verdwijnt, terwijl bij toepassing van $\forall_{\mathrm{L}}$ de formule $\forall x\, \varphi$ in de sequent blijft staan (omdat bij invoering van nieuwe d's de regel $\forall_{\mathrm{L}}$ weer op deze formule toegepast moet worden). Het boek doet hier vaag over. In de regel $\forall_{\mathrm{L}}$ is bovendien duidelijk gemaakt wat het boek bedoelt met "voor alle $d \in D$ hier aanwezig".

De precieze versies van de reductieregels voor $\forall_{\mathrm{R}}$ en $\exists_{\mathrm{R}}$ zien er analoog uit. Bij toepassing van de overige reductieregels wordt de informatie (1) en (2) gewoon gekopieerd.

18 Fair scheduling

"Fair scheduling" moet toegepast worden in de semantische tableau-methode voor de predikaatlogica (zie blz.141, 155). Dat kan bijvoorbeeld geimplementeerd worden door voor iedere sequent $\Phi \circ \Psi$ ook nog bij te houden:

3. een queue van (niet-atomaire) formules uit Φ en Ψ.

Voor de top-sequent wordt de queue geinitialiseerd door er alle formules van Φ en Ψ in te zetten.

Als een sequent $\Phi \circ \Psi$ niet sluit, dan moet de eerste formule van de queue worden gereduceerd (en die formule wordt dan uit de queue verwijderd). Merk op dat er een unieke reductieregel voor die (niet-atomaire) formule is, omdat $\Phi \circ \Psi$ niet sluit. Na toepassing van die reductieregel moeten alle niet-atomaire formules die door de regel in Φ en Ψ geintroduceerd worden, achteraan de queue worden toegevoegd. Bovendien, als de regel een nieuwe constante d_{k+1} introduceert, dan moeten alle universele formules van Φ en alle existentiele formules van Ψ achteraan de queue worden toegevoegd. Een sequent termineert open dan en slechts dan als de queue leeg is.

Deze, of een andere, implementatie van fair scheduling garandeert dat iedere toepasbare reductieregel ook aan de beurt komt. Voorbeeld: de sequent

$$\exists x(Ax \wedge Bx) \wedge \forall y \exists x\, Rxy \circ \exists x\, Ax \vee \exists x \forall y\, Rxy$$

heeft een gesloten tableau, maar zonder fair scheduling ("vergeet" $Ad_1 \wedge Bd_1$ te reduceren) ook een oneindig tableau.

Hoofdstuk 10. Predikaatlogica: afleidingen

We geven hier de afleidingsregels van de predikaatlogica, op dezelfde manier als die voor de propositielogica in Extra Sectie 6. Onze afleidingsregels zijn bovendien iets anders dan die in het boek, o.a. vanwege het gebruik van individuele constanten in plaats van vrije variabelen.

19 De afleidingsregels voor de predikaatlogica

Alle eerder genoemde afleidingsregels uit de propositielogica zijn ook afleidingsregels voor de predikaatlogica. Voor de kwantoren zijn verder de volgende eliminatie- en introductieregels aanwezig. Netzoals voor semantische tableaus beperken we ons tot formules die geen vrije variabelen bevatten, en geen gelijkheidsteken (=). Bovendien gebruiken we (weer netzoals voor semantische tableaus) individuele constanten $d_1, d_2, \ldots$ om willekeurige elementen van een domein mee aan te duiden (in het boek worden, in plaats daarvan, vrije variabelen gebruikt).

In de volgende regels is t een term die geen variabelen bevat, en is d een individuele constante.

$$\frac{\forall x\, \varphi \texttt{ uit } \Sigma}{[t/x]\varphi \texttt{ uit } \Sigma}\ \forall\mathrm{E}$$

$$\frac{[d/x]\varphi \texttt{ uit } \Sigma}{\forall x\, \varphi \texttt{ uit } \Sigma}\ \forall\mathrm{I} \quad \text{mits } d \text{ alléén in } [d/x]\varphi \text{ voorkomt}$$

$$\frac{\exists x\, \varphi \;\texttt{uit}\; \Phi \quad \psi \;\texttt{uit}\; \Gamma}{\psi \;\texttt{uit}\; \Phi \cup (\Gamma - \{[d/x]\varphi\})}\;\exists\,\mathrm{E} \quad \text{mits } d \text{ alléén in } [d/x]\varphi \text{ voorkomt}$$

$$\frac{[t/x]\varphi \;\texttt{uit}\; \Sigma}{\exists x\, \varphi \;\texttt{uit}\; \Sigma}\;\exists\,\mathrm{I}$$

De voorwaarden voor de toepassing van de ($\forall$ I) en ($\exists$ E) regels dienen zorgvuldig in acht te worden genomen en moeten daarom altijd bij de verantwoording van een toepassing van de regels worden vermeld. De $\exists$ E regel is misschien iets begrijpelijker in de volgende vorm, waarbij de Σ, φ notatie uit het boek wordt gebruikt; de regel lijkt dan ook meer op die uit het boek.

$$\frac{\exists x\, \varphi \;\texttt{uit}\; \Phi \quad \psi \;\texttt{uit}\; \Sigma, [d/x]\varphi}{\psi \;\texttt{uit}\; \Phi \cup \Sigma}\;\exists\,\mathrm{E} \quad \text{mits } d \text{ alléén in } [d/x]\varphi \text{ voorkomt}$$

De definities van de notie van een afleiding, boomvormig of lineair, en van de notie van afleidbaarheid zijn voor de predikaatlogica geheel analoog aan die voor de propositielogica.

20 Voorbeelden van lineaire afleidingen

We geven lineaire afleidingen voor een aantal voorbeelden uit Hoofdstuk 10 van het boek.

Voorbeeld (10.1). We laten zien dat $\forall x\, \exists y\, Rxy \vdash \exists y\, Rdy$, waarbij d een constante is.

1.	$\forall x\, \exists y\, Rxy$	uit φ	aanname φ
2.	$\exists y\, Rdy$	uit φ	$\forall$ E(1)

Voorbeeld (10.3). We laten zien dat $\forall x\, (Ax \rightarrow Bx) \vdash \forall x\, Ax \rightarrow \forall x\, Bx$.

1.	$\forall x\, (Ax \rightarrow Bx)$	uit φ	aanname φ
2.	$\lceil \forall x\, Ax$	uit ψ	aanname ψ
3.	$\mid\; \lceil Ad$	uit ψ	$\forall$ E(2)
4.	$\mid\; \mid\; Ad \rightarrow Bd$	uit φ	$\forall$ E(1)
5.	$\mid\; \lfloor Bd$	uit φ, ψ	$\rightarrow$ E(3, 4)
6.	$\lfloor \forall x\, Bx$	uit φ, ψ	$\forall$ I(5) d alléén in Bd
7.	$\forall x\, Ax \rightarrow \forall x\, Bx$	uit φ	$\rightarrow$ I(6)

De afleidingsboom die bij deze lineaire afleiding hoort is die uit het boek, als daar iedere y door d wordt vervangen (in plaats van de vrije variabele y gebruiken we de individuele constante d).

De binnenste haak komt overeen met een toepassing van ($\forall$I). Na regel 2 willen we bewijzen dat $\forall x Bx$. Daartoe bekijken we een willekeurig element d van het domein (gerepresenteerd door een constante d) en bewijzen dat daarvoor Bd geldt. De haak geeft het bereik van deze d aan. Merk op dat we in dit geval géén extra aanname doen. Op regel 6 checken we dat d een "nieuwe" constante is.

Voorbeeld (10.4). We laten zien dat $\forall x\, Ax \vee \forall x\, Bx \vdash \forall x\,(Ax \vee Bx)$. In het boek gebeurt dat als volgt (behalve dat y in plaats van d wordt gebruikt).

1.	$\forall x\, Ax \vee \forall x\, Bx$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\forall x\, Ax$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	Ad	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{E}(2)$
4.	$Ad \vee Bd$	`uit` ψ	$\vee\,\mathrm{I}(3)$
5.	$\forall x\,(Ax \vee Bx)$	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{I}(4)$ d alleen in $Ad \vee Bd$
6.	$\forall x\, Bx$	`uit` χ	aanname χ
7.	Bd	`uit` χ	$\forall\,\mathrm{E}(6)$
8.	$Ad \vee Bd$	`uit` χ	$\vee\,\mathrm{I}(7)$
9.	$\forall x\,(Ax \vee Bx)$	`uit` χ	$\forall\,\mathrm{I}(8)$ d alleen in $Ad \vee Bd$
10.	$\forall x\,(Ax \vee Bx)$	`uit` φ	$\vee\mathrm{E}(1,5,9)$

De binnenste haken komen beide overeen met een toepassing van ($\forall$I), waarin een willekeurige d bekeken wordt.

Wij geven de voorkeur aan de volgende, meer doelgerichte, afleiding waarbij de buitenste haak een toepassing van ($\forall$I) is:

1.	$\forall x\, Ax \vee \forall x\, Bx$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\forall x\, Ax$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	Ad	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{E}(2)$
4.	$Ad \vee Bd$	`uit` ψ	$\vee\,\mathrm{I}(3)$
5.	$\forall x\, Bx$	`uit` χ	aanname χ
6.	Bd	`uit` χ	$\forall\,\mathrm{E}(5)$
7.	$Ad \vee Bd$	`uit` χ	$\vee\,\mathrm{I}(6)$
8.	$Ad \vee Bd$	`uit` φ	$\vee\mathrm{E}(1,4,7)$
9.	$\forall x\,(Ax \vee Bx)$	`uit` φ	$\forall\,\mathrm{I}(8)$ d alleen in $Ad \vee Bd$

Voorbeeld (10.5). We laten zien dat $\exists x\,(Ax \wedge Bx) \vdash \exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx$.

1.	$\exists x\,(Ax \wedge Bx)$	`uit` χ	aanname χ
2.	$Ad \wedge Bd$	`uit` φ	aanname φ
3.	Ad	`uit` φ	$\wedge\,\mathrm{E}(2)$
4.	$\exists x\, Ax$	`uit` φ	$\exists\,\mathrm{I}(3)$
5.	Bd	`uit` φ	$\wedge\,\mathrm{E}(2)$
6.	$\exists x\, Bx$	`uit` φ	$\exists\,\mathrm{I}(5)$
7.	$\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx$	`uit` φ	$\wedge\,\mathrm{I}(4,6)$
8.	$\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx$	`uit` χ	$\exists\,\mathrm{E}(1,7)$ d alleen in φ

De haak komt overeen met een toepassing van ($\exists$E). Na regel 1 willen we de formule $\exists x(Ax \wedge Bx)$ gebruiken om iets te bewijzen. We nemen dan een willekeurige d die aan $Ad \wedge Bd$ voldoet (er is er minstens één) en gaan met behulp van die d het gevraagde bewijzen. De haak geeft het bereik van deze d aan (en van de aanname $Ad \wedge Bd$).

Voorbeeld (10.6). We proberen te bewijzen dat $\exists x\, Rxx \vdash \forall x\, \exists z\, Rxz$.
Deze afleiding is echter niet correct!

1.	$\exists x\, Rxx$	`uit` χ	aanname χ
2.	Rdd	`uit` φ	aanname φ
3.	$\exists z\, Rdz$	`uit` φ	$\exists\,\mathrm{I}(2)$
4.	$\exists z\, Rdz$	`uit` χ	$\exists\,\mathrm{E}(1,3)$ d alleen in Rdd (Onjuist!!)
5.	$\forall x\, \exists z\, Rxz$	`uit` χ	$\forall\,\mathrm{I}(4)$ d alleen in $\exists z\, Rdz$

Onjuist omdat d ook in $\exists z\, Rdz$ voorkomt. Intuïtief klopt dit óók niet. Bij de buitenste haak is een willekeurige d ingevoerd en daar hoeft natuurlijk niet Rdd voor te gelden.

Voorbeeld (10.7). We laten zien dat
$\exists x\, (Ax \wedge Bx), \neg\exists x\, (Bx \wedge Cx) \vdash \neg\forall x\, (Ax \to Cx)$.

1.	$\exists x\, (Ax \wedge Bx)$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\neg\exists x\, (Bx \wedge Cx)$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	$Ad \wedge Bd$	`uit` ξ	aanname ξ
4.	$\forall x\, (Ax \to Cx)$	`uit` χ	aanname χ
5.	$Ad \to Cd$	`uit` χ	$\forall\,\mathrm{E}(4)$
6.	Ad	`uit` ξ	$\wedge\,\mathrm{E}(3)$
7.	Bd	`uit` ξ	$\wedge\,\mathrm{E}(3)$
8.	Cd	`uit` χ, ξ	$\to\,\mathrm{E}(6,5)$
9.	$Bd \wedge Cd$	`uit` χ, ξ	$\wedge\,\mathrm{I}(7,8)$
10.	$\exists x\, (Bx \wedge Cx)$	`uit` χ, ξ	$\exists\,\mathrm{I}(9)$
11.	$\neg\forall x\, (Ax \to Cx)$	`uit` ψ, ξ	$\neg\,\mathrm{I}(2,10)$
12.	$\neg\forall x\, (Ax \to Cx)$	`uit` φ, ψ	$\exists\,\mathrm{E}(1,11)$ d alleen in ξ

Voorbeeld (10.8). We laten zien dat $\exists x\, \forall y\, Rxy \vdash \forall y\, \exists x\, Rxy$.

1.	$\exists x\, \forall y\, Rxy$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\forall y\, Rd_1y$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	Rd_1d_2	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{E}(2)$
4.	$\exists x\, Rxd_2$	`uit` ψ	$\exists\,\mathrm{I}(3)$
5.	$\forall y\, \exists x\, Rxy$	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{I}(4)$ d_2 alleen in $\exists x\, Rxd_2$
6.	$\forall y\, \exists x\, Rxy$	`uit` φ	$\exists\,\mathrm{E}(1,5)$ d_1 alleen in ψ

Maar wij geven (weer) de voorkeur aan een meer doelgerichte afleiding. Bovendien gebruiken we (voor de leesbaarheid) d en e in plaats van d_2 en d_1. De buitenste haak is het bereik van d en de binnenste haak dat van e.

1.	$\exists x\, \forall y\, Rxy$	`uit` φ	aanname φ
2.	$\forall y\, Rey$	`uit` ψ	aanname ψ
3.	Red	`uit` ψ	$\forall\,\mathrm{E}(2)$
4.	$\exists x\, Rxd$	`uit` ψ	$\exists\,\mathrm{I}(3)$
5.	$\exists x\, Rxd$	`uit` φ	$\exists\,\mathrm{E}(1,4)$ e alleen in ψ
6.	$\forall y\, \exists x\, Rxy$	`uit` φ	$\forall\,\mathrm{I}(5)$ d alleen in $\exists x\, Rxd$

Merk op dat we in de twee laatste afleidingen elk van de regels voor de kwantoren hebben gebruikt.

Hoofdstuk 11. Predikaatlogica: metatheorie

We bewijzen de semantische correctheid en volledigheid van de natuurlijke deductie voor de predikaatlogica.

21 Correctheid

Stelling (11.2). Als $\Sigma \vdash \varphi$ dan $\Sigma \models \varphi$.

Het bewijs van deze stelling is een uitbreiding van het bewijs van Stelling 5.4a (voor de propositielogica). Dat bewijs ging met inductie naar het aantal knopen van een afleidingsboom voor φ uit Σ, of, wat op hetzelfde neerkomt, met inductie naar de lengte van een lineaire afleiding van φ `uit` Σ. We moeten dus weer nagaan dat alle bewijsregels "geldigheid bewaren". We illustreren dat met de bewijsregels voor de universele kwantor.

Voor de bewijsregel $\forall$E moeten we laten zien: als $\Sigma \models \forall x\, \varphi$, dan $\Sigma \models [t/x]\varphi$. Neem een model M waarvoor geldt dat $V_M(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Sigma$. Uit de aanname volgt dat $V_M(\forall x\, \varphi) = 1$ en dat betekent dat $V_{M,[x\mapsto a]}(\varphi) = 1$ voor ieder element a van het domein D. We moeten bewijzen dat $V_M([t/x]\varphi) = 1$. Volgens Bewering 8.2 is $V_M([t/x]\varphi) = V_{M,[x\mapsto a]}(\varphi)$ voor $a = V_M(t)$, en dat is dus inderdaad gelijk aan 1.

Voor de bewijsregel $\forall$I moeten we laten zien: als $\Sigma \models [d/x]\varphi$, dan $\Sigma \models \forall x\, \varphi$ (waarbij we aannemen dat d alléén in $[d/x]\varphi$ voorkomt). Neem weer een model $M = (D, I)$ waarvoor geldt dat $V_M(\psi) = 1$ voor alle $\psi \in \Sigma$. We moeten bewijzen dat $V_M(\forall x\, \varphi) = 1$ oftewel dat $V_{M,[x\mapsto a]}(\varphi) = 1$ voor ieder element a van het domein D. Neem zo'n $a \in D$ en bekijk het model $M' = (D, I')$ waarvoor geldt dat $I'(d) = a$ en $I'(x) = I(x)$ voor $x \neq d$. Met andere woorden, M' is hetzelfde als M, maar bovendien wordt de individuele constante d geinterpreteerd als het element a van het domein D. Omdat d niet in Σ voorkomt geldt $V_{M'}(\psi) = V_M(\psi) = 1$. Uit de aanname $\Sigma \models [d/x]\varphi$ volgt dan dat $V_{M'}([d/x]\varphi) = 1$. Volgens Bewering 8.2 is $V_{M'}([d/x]\varphi) = V_{M',[x\mapsto a]}(\varphi)$ omdat $a = V_{M'}(d)$. En omdat d niet in φ voorkomt is dat gelijk aan $V_{M,[x\mapsto a]}(\varphi)$. Dus $V_{M,[x\mapsto a]}(\varphi) = 1$, wat te bewijzen was.

22 Volledigheid

Stelling (11.3). Als $\Sigma \models \varphi$ dan $\Sigma \vdash \varphi$.

We geven hier het bewijs van deze stelling door de inductiestap van het bewijs van Bewering E8 in Extra Sectie 13 aan te vullen met de reductieregels voor de kwantoren.

Stel dat $\forall_{\mathrm{L}}$ de bovenste reductieregel is:

$$\begin{array}{r} \Phi, \forall x\, \varphi \circ \Psi \\ | \\ \Phi, \forall x\, \varphi, [d/x]\varphi \circ \Psi \end{array}$$

waarbij we (mogen) aannemen dat er maar één d is. Volgens de IH geldt dan dat $\Phi, \forall x\, \varphi, [d/x]\varphi \vdash \psi$, waarbij ψ weer de disjunctie van alle formules in Ψ is. Volgens ($\forall$E) geldt $\forall x\, \varphi \vdash [d/x]\varphi$. Dus volgt $\Phi, \forall x\, \varphi \vdash \psi$ uit Stelling E7.

Stel nu dat $\exists_{\mathrm{L}}$ de bovenste reductieregel is:

$$\begin{array}{r@{\;\circ\;}l} \Phi, \exists x\, \varphi & \Psi \\ \multicolumn{2}{c}{|} \\ \Phi, [d/x]\varphi & \Psi \end{array}$$

waarbij d "nieuw" is en dus niet voorkomt in $\Phi, \exists x\, \varphi, \Psi$. Volgens de IH geldt $\Phi, [d/x]\varphi \vdash \psi$. Uit ($\exists$E) volgt nu dat $\Phi, \exists x\, \varphi \vdash \psi$ (want d komt alléén voor in $[d/x]\varphi$).

Stel dat $\forall_{\mathrm{R}}$ de bovenste reductieregel is:

$$\begin{array}{r@{\;\circ\;}l} \Phi & \forall x\, \varphi, \Psi \\ \multicolumn{2}{c}{|} \\ \Phi & [d/x]\varphi, \Psi \end{array}$$

waarbij d niet voorkomt in $\Phi, \forall x\, \varphi, \Psi$. Volgens de IH geldt $\Phi \vdash [d/x]\varphi \vee \psi$ en dus, via $\neg\psi, \alpha \vee \psi \vdash \alpha$ en Stelling E7, geldt $\Phi, \neg\psi \vdash [d/x]\varphi$. Omdat d niet vrij is in $\forall x\, \varphi, \Phi, \neg\psi$ volgt nu uit ($\forall$I) dat $\Phi, \neg\psi \vdash \forall x\, \varphi$. Met ($\to$I) krijgen we dan dat $\Phi \vdash \neg\psi \to \forall x\, \varphi$ en dus (via $\neg\psi \to \alpha \vdash \alpha \vee \psi$) krijgen we $\Phi \vdash \forall x\, \varphi \vee \psi$.

Tenslotte moeten we voor $\exists_{\mathrm{R}}$ bewijzen dat als $\Phi \vdash [d/x]\varphi \vee \exists x\, \varphi \vee \psi$, dan $\Phi \vdash \exists x\, \varphi \vee \psi$. Volgens ($\exists$I) geldt $[d/x]\varphi \vdash \exists x\, \varphi$ en dus $[d/x]\varphi \vdash \exists x\, \varphi \vee \psi$ met ($\vee$I). Aangezien ook $\exists x\, \varphi \vee \psi \vdash \exists x\, \varphi \vee \psi$, volgt nu uit ($\vee$E) dat $[d/x]\varphi \vee \exists x\, \varphi \vee \psi \vdash \exists x\, \varphi \vee \psi$. Het gevraagde volgt nu uit Stelling E7.

Hiermee is de volledigheidsstelling bewezen voor de predikaatlogica.

Dankwoord

Henk Goeman heeft aan dit dictaat bijgedragen via de vele leerzame discussies die ik met hem in de herfst van 1999 over dit vak heb gevoerd.