TENTAMEN FUNDAMENTELE INFORMATICA 3
Maandag 16 april 2018, 14.00 - 17.00 uur

Dit tentamen bestaat uit zes opgaven, waarbij steeds tussen [en] staat hoeveel punten er ongeveer mee te verdienen zijn. In totaal zijn er 100 punten te verdienen. Geef de gevraagde Turingmachines door middel van hun transitiediagram.
Wanneer er bij een vraag om uitleg of toelichting gevraagd wordt, is het belangrijk om die ook te geven.
Als je het antwoord op een onderdeel niet weet, en je hebt dat antwoord nodig bij een later onderdeel, dan kun je het antwoord 'kopen' bij de docent.

---

1. [4 pt] In de definitie van een stapelautomaat is de transitiefunctie δ een functie van $Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma$ naar de verzameling van eindige deelverzamelingen van $Q \times \Gamma^*$.

   Hoe zit dat bij een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$? Van wat naar wat is δ dan een functie? Wees precies in je antwoord.

---

2. [28 pt] Als je bij deze opgave gebruik wilt maken van componenten, zul je die ook moeten uitwerken (tekenen dus).

   (a) Construeer een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T_1 die twee strings $x_1, x_2 \in \{a, b\}^*$ als invoer heeft, en die accepteert, dan en slechts dan als x_2 een anagram ('een permutatie van de letters') van x_1 is. Dus bijvoorbeeld $x_1 = aababa$ en $x_2 = baaaab$ moeten geaccepteerd worden, maar $x_1 = aababa$ en $x_2 = baaab$ niet. Bij aanvang van de berekening staan de twee invoerstrings samen op de tape, net zoals bij functies van twee argumenten.

   Leg duidelijk uit hoe T_1 werkt.

   (b) Construeer een gewone (deterministische, 1-tape) Turingmachine T_2 die een string $x \in \{a, b\}^*$ als invoer heeft, en daarvoor de functie $f(x) = a^{n_a(x)} b^{n_b(x)}$ berekent. De functie f ordent dus de letters in haar argument x, bijvoorbeeld $f(aababa) = aaaabb$.

   Leg duidelijk uit hoe T_2 werkt.

---

3. [17 pt]

   (a) Geef een *unrestricted grammar* G voor de taal

   $$L = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\} = \{\Lambda, 1, 1111, 111111111, \ldots\}$$

   (alle kwadraten in unaire notatie). Leg ook uit wat de functie is van de diverse variabelen en producties in G.

   Hint genereer eerst strings van de vorm LA^nB^nR.

   (b) Geef een afleiding in G voor het woord 1111.

---

4. [20 pt] In het bewijs van Stelling 8.14 in het boek wordt beschreven, hoe je bij een willekeurige Turingmachine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$ een unrestricted grammar $G = (V, \Sigma, S, P)$ kunt construeren, zó dat $L(G) = L(T)$.

   De grammatica G bevat drie soorten producties. De eerste soort is bedoeld om initiële configuraties van de Turingmachine na te bouwen. De tweede soort is voor het simuleren van berekeningen van de Turingmachine. De derde soort is voor het reconstrueren van de invoer van de Turingmachine, aan het eind van de berekening.

   (a) Wanneer we met G een berekening van T voor de invoer $a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ willen simuleren, wordt met de producties van de eerste soort de volgende string gegenereerd:

   $$q_0(\Delta\Delta)(a_1a_1)\dots(a_na_n)(\Delta\Delta)\dots(\Delta\Delta)$$

   Leg duidelijk uit waarom de letters a_i dubbel voorkomen in de string; wat is de rol van elk van de twee voorkomens bij het simuleren van de berekening?

   (b) Als T de invoer $a_1 \dots a_n$ accepteert, hoe ziet de string in de grammatica G er dan uit, direct na het simuleren van de berekening van T? Wees precies in je beschrijving van de string.

   (c) Geef de producties van de derde soort in G, de producties om de invoer van T te reconstrueren als die invoer geaccepteerd wordt. Leg ook uit wat de functie is van de verschillende producties.

   Je mag de producties algemeen beschrijven in termen van elementen σ van Σ en/of Γ en/of $\{\Delta\}$. Als alternatief mag je ook aannemen dat $\Sigma = \{a, b\}$ en dat $\Gamma = \{a, b, c\}$.

---

5. [14 pt]

   (a) Toon aan dat de verzameling $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ aftelbaar is, door te beschrijven hoe je alle elementen van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in één lijst kunt zetten. Geef ook de eerste zeven elementen van de resulterende lijst.

   (b) Geef voor elk van de volgende twee verzamelingen aan of ze aftelbaar of overaftelbaar is. Geef een korte motivatie van je antwoorden (hooguit enkele regels per antwoord).

      i. De verzameling van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$.

      ii. De verzameling van alle functies van $\{0, 1\}$ naar $\mathbb{N}$.

---

6. [17 pt] Beschouw het volgende beslissingsprobleem:

   AcceptsILengthI:
   Gegeven een Turingmachine T en een geheel getal $i \geq 0$, accepteert T precies i verschillende strings van lengte i ?

   (a) Waaruit bestaat een instantie van *AcceptsILengthI*?

   (b) Geef een voorbeeld van een ja-instantie en een voorbeeld van een nee-instantie van *AcceptsILengthI*.

   (c) Beschouw ook het volgende beslissingsprobleem:

   Accepts-ab:
   Gegeven een Turingmachine T waarbij a en b in het invoeralfabet Σ zitten, accepteert T de string ab.

   Gegeven is dat *Accepts-ab* niet beslisbaar is.

   Toon aan dat ook *AcceptsILengthI* niet beslisbaar is, met behulp van een reductie met *Accepts-ab*. Laat uiteraard ook zien dat aan alle eisen van een reductie voldaan is, en vergeet niet om de conclusie te trekken.

   Als je geen geschikte reductie tussen AcceptsILengthI *en* Accepts-*ab* *weet, kun je een deel van de punten daarvan verdienen door uit te leggen hoe je voor algemene beslissingsproblemen P_1 en P_2 aantoont dat $P_1 \leq P_2$.*

`einde tentamen`