ALGORITMIEK: opgaven werkcollege 3

Opgave 1. We bekijken een nieuwe variant op het tweepersoonsspel Nim. Op tafel ligt een stapel met n (> 1) lucifers. Er zijn twee spelers, Sven en Gerard, die om de beurt een "zet" doen. De speler die aan de beurt is mag ofwel (i) één stapel lucifers splitsen in twee stapels met een verschillend aantal lucifers, ofwel (ii) 1 of 2 lucifers van één van de stapels wegnemen. Binnen één zet mag een speler dus slechts één stapel splitsen, en als hij 2 lucifers weg wil nemen, dan moeten die beide van dezelfde stapel worden gehaald. De speler die de laatste lucifer(s) wegneemt heeft gewonnen.
Bijvoorbeeld: stel dat we tijdens het spel in een toestand terechtkomen waarbij op tafel twee stapels liggen, de ene met 4 en de andere met 5 lucifers. Dan zijn er zeven zetten mogelijk, waarvan 3 een stapel splitsen (ga dit na).

a. Wat zijn voor dit spel toestanden en acties?
b. Geef de toestand-actie-ruimte voor het geval $n = 5$. Neem aan dat Sven begint. Toestanden die je al eerder hebt uitgewerkt (maar dan misschien met de andere speler aan de beurt) hoef je niet verder uit te werken, maar schrijf er wel bij wie wint. Is het spel voor $n = 5$ winnend voor de beginnende speler? (Dat wil zeggen kan de speler die begint altijd winnen, ongeacht wat de tegenstander doet?)

Opgave 2. Op een smal bergpad, met aan de ene kant een diep ravijn en aan de andere kant een steile bergwand, ontmoeten twee groepen geiten elkaar. De ene groep bestaat uit n zwarte en de andere groep uit n witte geiten. De zwarte geiten komen van links en de witte geiten van rechts. Op het moment dat ze stoppen is er tussen beide groepen nog juist 1 geitlengte vrij. Deze beginsituatie kan bijvoorbeeld voor $n = 4$ worden weergegeven als: `zzzz wwww`.
Een geit die voor een lege plek staat kan een geitlengte doorlopen. Er is echter geen ruimte om elkaar op de gewone manier te passeren. De geiten hebben daar het volgende op gevonden: een geit die door een geit van de andere kleur wordt gescheiden van een lege plek kan over die andere heenspringen. Geiten springen dus nooit over geiten van de eigen kleur heen.
De geiten kunnen zich niet omdraaien of achteruit lopen/springen, dus de zwarte geiten bewegen alleen van links naar rechts en de witte geiten alleen van rechts naar links. De bedoeling is dat de rechtsgaande en de linksgaande groep van plaats verwisseld worden, zodat ze hun weg kunnen vervolgen. De eindsituatie voor bijvoorbeeld $n = 4$ is dan: `wwww zzzz`. Het verwisselingsproces vindt plaats op een recht stukje pad dat precies plaats biedt aan $2n + 1$ geiten (er is dus altijd 1 plek open).
Opm. (Om misverstanden te voorkomen.) De zwarte en witte geiten hoeven niet om de beurt te bewegen; het volgende is bijv. toegestaan:
`zzzz wwww` $\longrightarrow$ `zzz zwwww` $\longrightarrow$ `zz zzwwww` $\longrightarrow$ `z zzzwwww` , etc.

a. Wat zijn voor dit probleem toestanden en acties?
b. Geef een bovengrens voor het aantal "zetten" (sprong over een geit of 1 plek doorlopen) dat gedaan moet worden om van de begintoestand in de eindtoestand te komen.
c. Een bovengrens voor het totaal aantal mogelijke toestanden in de toestand-actie-ruimte is $\binom{2n}{n} * (2n + 1)$. Leg dit uit.
d. Voor $n = 2$ zijn vanuit de beginsituatie twee acties mogelijk:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{zz ww} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\text{zzw w} & & \text{z zww (*)}
\end{tikzcd}
$$

Teken nu de toestand-actie-ruimte voor het geval $n = 2$. I.v.m. symmetrie hoeft alleen het gedeelte vanaf (*) gegeven te worden. Hoeveel stappen kost het in dit geval om van begin- naar eindtoestand te komen?

e. Voor elke n zijn er altijd twee oplossingen: de ene begint met een loopzet van een zwarte geit, de andere met een loopzet van een witte geit. Bekijk het geval $n = 3$. Beredeneer hoe je van begintoestand naar eindtoestand kan komen als je begint met een zwarte geit. Hint. De oplossing doet 15 zetten in totaal. De eerste zetten zien er zo uit: `zzz www` $\longrightarrow$ `zz zwww` (*) $\longrightarrow$ `zzwz ww` (**) $\longrightarrow$ `zzwzw w`. Vanuit (*) zijn twee zetten mogelijk: de loopzet leidt tot `z zzwww`, waarin de 5 rechtse geiten geblokkeerd zijn. Dus kies de sprongzet. Vanuit (**) zijn twee loopzetten mogelijk: de ene leidt tot `zzw zww`, en als je die toestand verder uitwerkt zie je dat die leidt tot een blokkade. Dus kies de andere zet.

Opgave 3. We bekijken het volgende eenpersoonsspel, dat gespeeld wordt met n witte en n zwarte schijven. In de beginsituatie liggen de schijven in een rij beginnend (van links naar rechts) met een witte schijf, dan een zwarte, dan weer een witte, dan weer een zwarte, etcetera. Aan het eind van de rij laten we twee plekken open.

Beginsituatie voor $n = 4$: `W Z W Z W Z W Z - -`

De bedoeling van het spel is om via opeenvolgende duo-verplaatsingen zo snel mogelijk de situatie te bereiken waarin van links naar rechts eerst alle n witte schijven achter elkaar liggen, dan de twee open posities en ten slotte alle n zwarte schijven.

Eindsituatie voor $n = 4$: `W W W W - - Z Z Z Z`

Onder een duo-verplaatsing (zet) wordt verstaan het verplaatsen van twee naast elkaar liggende schijven naar de twee open plekken, waarbij hun onderlinge volgorde behouden blijft. Als voorbeeld een opeenvolging van drie duo-verplaatsingen:

`W Z W Z W Z W Z - -` $\longrightarrow$ `W Z W Z - - W Z W Z` $\longrightarrow$
`W - - Z Z W W Z W Z` $\longrightarrow$ `W W W Z Z - - Z W Z`

a. Wat zijn voor dit spel toestanden en acties (voor algemene n) ?

b. Geef een redelijke bovengrens voor het aantal mogelijke toestanden zoals in **a.** gedefinieerd (3^{2n+2} is niet voldoende) en leg uit hoe je aan dat aantal komt.

c. (i) Beschouw het geval $n = 3$. De begintoestand, `W Z W Z W Z - -`, heeft vijf directe vervolgstanden, waarvan er één moet worden uitgewerkt, namelijk `W Z - - W Z W Z`. Teken dat deel van de toestand-actie-ruimte voor $n = 3$ dat alle toestanden (en verbindende acties) bevat die in hooguit twee zetten uit `W Z - - W Z W Z` verkregen kunnen worden. De begintoestand hoeft daarbij niet nogmaals uitgewerkt te worden.

(ii) Geef een opeenvolging van zetten die leidt van begin- naar eindtoestand voor $n = 3$.

Opgave 4. (oude tentamenopgave)

We bekijken het volgende tweepersoonsspel. Het wordt gespeeld met $m*n$ damstenen, die in een m bij n rechthoek (m rijen en n kolommen) worden gelegd. Er zijn twee spelers, V (Verticaal) en H (Horizontaal), die om de beurt een zet doen. We spreken af dat V begint. Als speler V een zet doet neemt deze steeds een hele kolom weg, speler H een hele rij. Door het wegnemen van een rij of kolom uit een rechthoek zal in het algemeen die rechthoek in twee kleinere rechthoeken worden verdeeld. Indien van de rand wordt weggehaald, resteert één kleinere rechthoek. Bij aanvang van het spel is er slechts één rechthoek, maar tijdens het spel worden dit er meer. Als een speler aan de beurt is neemt deze een hele kolom (V) of rij (H) weg uit precies één van die rechthoeken. De speler die de laatste steen/stenen weghaalt heeft gewonnen.

Een mogelijk spelverloop, met $m = 3$ en $n = 4$ (waarin de `X`-en de stenen aangeven en de verschillende rechthoeken door komma's gescheiden naast elkaar staan):

```
X X X X    V     X  X X    H     X              V     X           H    X
X X X X   --->   X, X X   --->   X, X X, X X   --->   X, X, X X  --->  X, X
X X X X          X  X X          X                    X                X
  (*)                                                                   (**)
```

In toestand `(**)` is V aan de beurt. Als deze in de volgende zet de kolom van 3 stuks weghaalt verliest hij. Veronderstel dus dat hij de losse steen weghaalt. Dan blijft er een toestand over die winnend is voor H. (Zij neemt namelijk de middelste rij (één steen) en haalt in haar volgende zet de laatste steen weg.) Stand `(**)` is derhalve verliezend voor V.

a. Wat zijn voor dit spel toestanden en acties (voor algemene m en n)?
b. Teken de toestand-actie-ruimte voor het geval $m = 2$ en $n = 4$, uitgaande van de beginsituatie waarin V begint. Geef bij elke toestand aan of deze winnend is voor V of voor H. Bepaal zo of het spel winnend is voor V of H en geef aan hoe diegene kan winnen. Toestanden die in één zet te winnen zijn hoef je niet verder uit te werken. Verder hoef je toestanden die speltechnisch hetzelfde zijn maar één keer uit te werken. Geef wel aan waarom zo'n stand dan winnend is voor V/H.

c. We bekijken het speciale geval waarbij $m = 1$, dus standen bestaande uit één enkele rij met n stenen. We veronderstellen weer dat V begint.
Toon aan: voor n oneven is zo'n stand winnend voor V. Geef hierbij een winnende strategie voor V. *Hint*: laat zien dat het geval 1 bij 3 winnend is voor V, en breid dit uit naar algemene oneven n.
d. Bewijs dat als n even is zo'n stand juist verliezend is voor V (dus winnend voor H). Geef een winnende strategie voor H.

Opgave 5. We bekijken het spelletje boter-kaas-en-eieren, gespeeld door Kruisje (X) en Rondje (O). Neem aan dat Kruisje altijd begint.
a. Teken een deel van de toestand-actie-ruimte.
b. Hoe ziet een toestand er in het algemeen uit en hoeveel legale toestanden zijn er?

Opgave 6. (Levitin: opgave 2.1.2.a) Consider the following algorithm for finding the difference between two $n \times n$ matrices A and B:

```
for (i=0;i<n;i++)
  for (j=0;j<n;j++)
    diff[i][j] = A[i][j] - B[i][j];
```

What is its basic operation? How many times is it performed as a function of the matrix order n? As a function of the total number of elements in the input matrices?

Opgave 7. (Levitin: 2.2.5)
List the following functions according to their order of growth from the lowest to the highest:

$$(n^2+3)!, \quad 2\log_2(n+50)^5, \quad 3^{3n}, \quad 0.05n^{10}+3n^3+1 \quad (\ln n)^3, \quad \sqrt{n}, \quad 3^{2n}$$

Hierin is $\ln n$ de natuurlijke logaritme van n, ofwel $\log_e n$.

Opgave 8. (Levitin: 2.3.5)
Consider the following algorithm:

```
ALGORITHM Foo (A[0..n-1])
  // Input: An array A[0..n-1] of n real numbers
  val = 100;
  sumgreater = 0;
  sumless = 0;
  for (i=0;i<n;i++)
  { if (A[i]>val)
      sumgreater = A[i];
    if (A[i]<val)
      sumless = A[i];
  }
  return (sumgreater - sumless);
```

a. What does this algorithm compute?
b. What is its basic operation?
c. How many times is the basic operation executed?
d. What is the efficiency class of this algorithm?
e. Suggest an improvement or a better algorithm altogether, and indicate its efficiency class. If you cannot do it, try to prove that, in fact, it cannot be done.