

# Algoritmiek

voor Informatica / AI

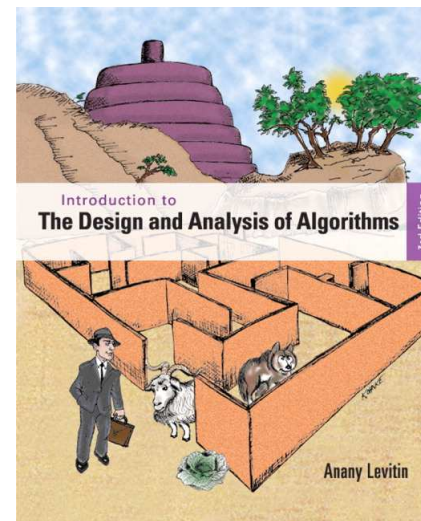
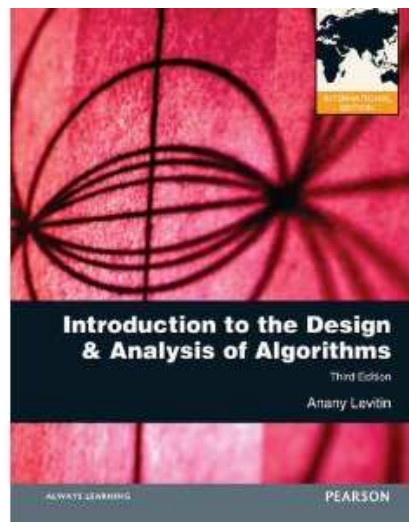
8 februari 2022

Introductie

- docent: Rudy van Vliet  
rvvliet@liacs.nl
- assistenten werkcollege en practicum
- website: <https://liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek/>  
voor: inhoud
- Brightspace, voor: groepen voor colleges en opdrachten,  
inleveren opdrachten, cijfers, email, Kaltura
- **college**: dinsdag 11.15–13.00 (+ weblecture)
- **werkcollege**: dinsdag 14.15–16.00 **maar niet vandaag**
- **practicumbijeenkomst**: woensdag 14.15–16.00 **maar niet morgen**
- **tentamen**: donderdag 9 juni 2022, 14.15–17.15
- **hertentamen**: dinsdag 19 juli 2022, 14.15–17.15

Bij dit college behorende **boek**:

Anany Levitin  
Introduction to The Design and Analysis of Algorithms  
**third** edition  
Addison-Wesley, 2012



- drie programmeeropdrachten in C++
- nadruk op toepassen van besproken probleemoplossingsmethoden
- bij voorkeur in tweetallen (zoek je partner?)
- alle drie voldoende ( $\geq 5.5$ )
- if (tentamen gehaald)
  - if (programmeerwerk in orde)
    - $\text{eindcijfer} = \frac{2}{3} \text{tentamencijfer} + \frac{1}{3} \text{practicumcijfer};$
  - else
    - (nog) geen eindcijfer;
- else
  - $\text{eindcijfer} = \text{tentamencijfer};$

- deadline
- twee weken uitloop,  $-1$  pt per deel van week
- herkansingen aan eind semester,  $\max = 5.5$
- telaarplagiat

Een **algoritme** is een opeenvolging van **ondubbelzinnig** omschreven instructies die leiden tot een oplossing van een probleem. Het algoritme geeft voor elke willekeurige legale invoer van het probleem de vereiste uitvoer in een **eindig** aantal stappen (in eindige tijd).

In de praktijk willen we dat een algoritme **effectief** is, dat wil zeggen binnen redelijke tijd klaar is, en liefst zo snel mogelijk (**efficiëntie**): **complexiteit** van een algoritme.

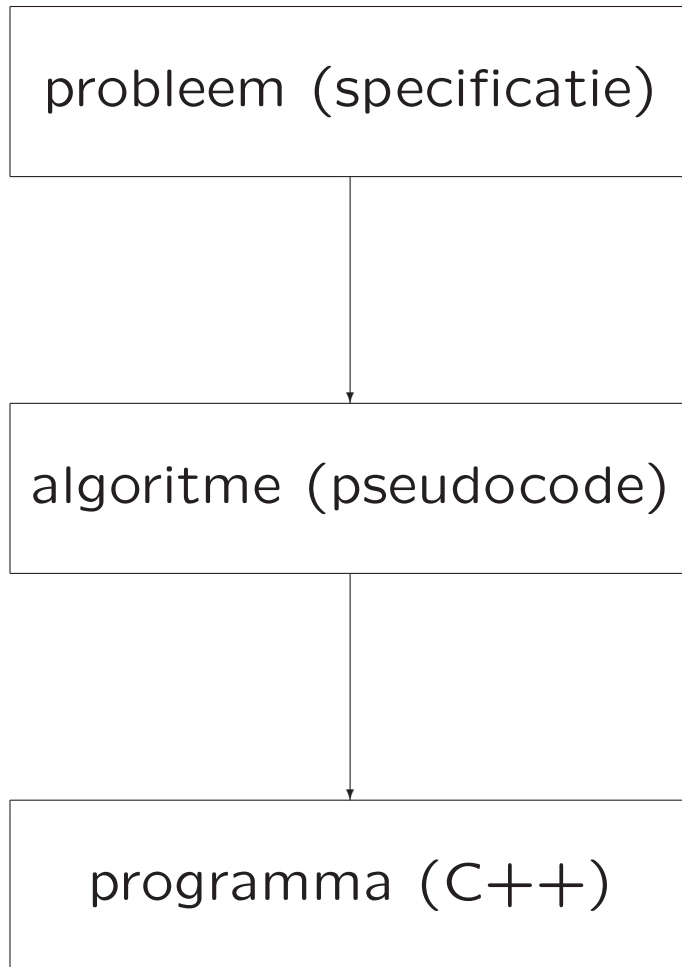
Het woord algoritme is afgeleid van **Abu Ja'far Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi** (ca. 780–850), een belangrijk Arabisch wiskundige uit de middeleeuwen.



Een **algoritme** is een recept, methode, ... voor het oplossen van een probleem, met de volgende eigenschappen:

1. **eindigheid**: stopt na een eindig aantal stappen
2. **bepaaldheid**: bestaat uit ondubbelzinnig omschreven stappen
3. **invoer**: het is duidelijk wat geldige invoer is
4. **uitvoer**: er kan bewezen worden dat de correcte uitvoer wordt gegeven voor elke geldige invoer
5. **effectiviteit**: de stappen zijn voldoende eenvoudig en het antwoord wordt binnen redelijke tijd gegeven





ontwerp

implementatie

- ontwerpen van algoritmen: **Algoritmiek, Datastructuren**
- hoe beschrijven we het algoritme?
- correctheid bewijzen: **Program Correctness**
- analyse van algoritmen: **Complexity**
  - efficiëntie
    - . theoretische analyse: tijdcomplexiteit, ruimtecomplexiteit
    - . empirische analyse: testen
  - optimaliteit: bestaat er een beter algoritme?

In dit college bekijken we enkele belangrijke **ontwerptechnieken** voor het algoritmisch oplossen van problemen:

- \* brute force/exhaustive search
- \* backtracking
- \* divide and conquer
- \* dynamic programming
- \* greedy approach
- \* branch and bound

**Probleem:** *Gegeven* twee niet-negatieve gehele getallen  $m$  en  $n$  (niet beide nul). *Vraag:* wat is de grootste gemeenschappelijke deler, genoteerd als  $\text{ggd}(m,n)$ , van  $m$  en  $n$ ?

**Voorbeeld:**  $\text{ggd}(60,24) = 12$ ;  $\text{ggd}(25,0) = 25$ ;  
 $\text{ggd}(200, 441) = 1$ ;  $\text{ggd}(588,495) = 3$ .

We bekijken drie algoritmes voor het berekenen van  $\text{ggd}(m,n)$ .

**Probleem:** *Gegeven* twee niet-negatieve gehele getallen  $m$  en  $n$  (niet beide nul). *Vraag:* wat is de grootste gemeenschappelijke deler, genoteerd als  $\text{ggd}(m,n)$ , van  $m$  en  $n$ ?

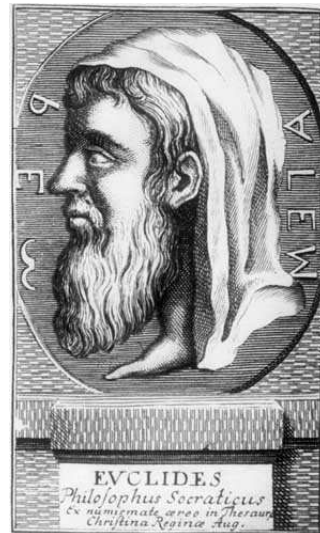
**Voorbeeld:**  $\text{ggd}(60,24) = 12$ ;  $\text{ggd}(25,0) = 25$ ;  
 $\text{ggd}(200, 441) = 1$ ;  $\text{ggd}(588,495) = 3$ .

Het algoritme van **Euclides** is gebaseerd op het herhaald gebruiken van de gelijkheid

$$\text{ggd}(m, n) = \text{ggd}(n, m \bmod n),$$

totdat de tweede parameter nul wordt.

**Voorbeeld:**  $\text{ggd}(60,24) = \text{ggd}(24, 12) = \text{ggd}(12, 0) = 12$



Euclides van Alexandrië (ca. 325 – 265 (voor Christus))

Prominent wiskundige uit de oudheid, vooral bekend vanwege zijn verhandeling over meetkunde: De Elementen.

Het **algoritme van Euclides** in **pseudocode** (anders dan die in het boek wordt gebruikt):

```
while  $n \neq 0$  do  
  // elementaire operaties: deling en toekenning  
  rest :=  $m \bmod n$ ;  
   $m := n$ ;  
   $n := \text{rest}$ ;  
od  
return  $m$ ;
```

Zie ook dictaat en college **Programmeermethoden**.

Er zijn nog andere algoritmen voor het berekenen van de ggd van twee getallen. We bekijken er twee. Welke van de drie is het efficiëntst?

**Algoritme van Euclides:** worst case ...



**Algoritme van Euclides: worst case**

$k$	$m$	$n$
0	1	0
1	2	1
2	3	2
3	5	3
4	8	5
5	13	8
6	21	13
...	...	

Grofweg:  $n \geq \text{fib}(k + 1)$

Ofwel:  $k \leq \dots$

Het volgende algoritme (genoteerd in gewone taal) berekent  $\text{ggd}(m,n)$  door van alle integers  $\leq \min(m,n)$  te proberen of ze  $m$  en  $n$  beide delen.

### Algoritme 2:

**Stap 1** Bepaal  $\min(m,n)$  en ken de waarde toe aan  $t$ ;

**Stap 2** Deel  $m$  door  $t$ . Als de rest 0 is, ga naar Stap 3; anders ga naar Stap 4;

**Stap 3** Deel  $n$  door  $t$ . Als de rest 0 is, dan is  $t$  de ggd, dus return  $t$  en stop; anders ga naar Stap 4;

**Stap 4** Laag  $t$  met 1 af en ga naar Stap 2;

Merk op dat –in tegenstelling tot het algoritme van Euclides– dit algoritme fout gaat als  $m$  of  $n$  nul is. Er moet hier dus gelden:  $m \neq 0$  en  $n \neq 0$ .

Onderstaande methode vindt de ggd door  $m$  en  $n$  te ontbinden in hun priemfactoren. De ggd is dan het product van de gezamenlijke priemfactoren.

**Voorbeeld:**  $60 = 2^2 * 3 * 5$  en  $24 = 2^3 * 3$ , dus  $\text{ggd}(60, 24) = 2^2 * 3 = 12$ .

**Stap 1** Vind de priemontbinding van  $m$ ;

**Stap 2** Vind de priemontbinding van  $n$ ;

**Stap 3** Vind alle gemeenschappelijke priemfactoren;

**Stap 4** Bereken het product van de gemeenschappelijke priemfactoren en return deze waarde;

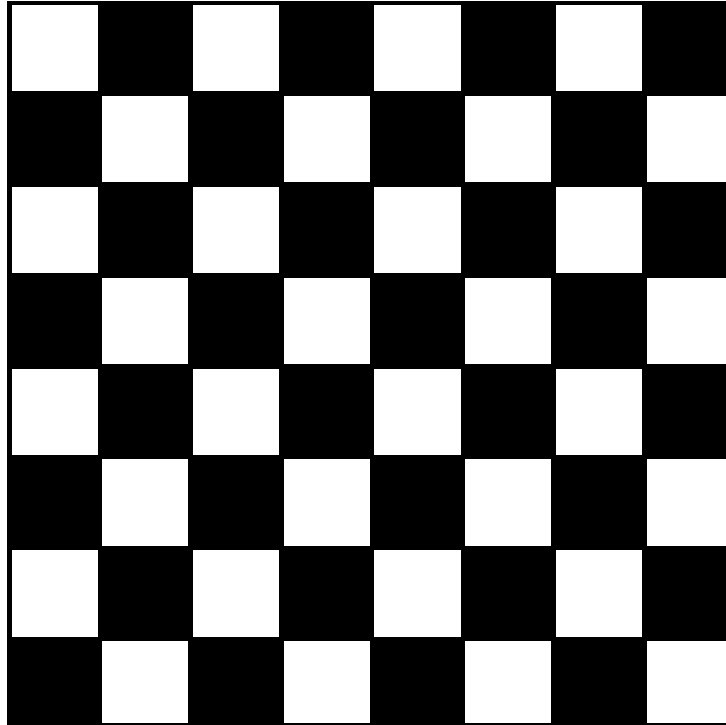
**Vraag:** vinden we dit eigenlijk wel een algoritme?

Andere bekende problemen die goed **algoritmisch** (al dan niet efficiënt) aan te pakken zijn:

- sorteren
- zoeken
- kortste pad in een graaf
- handelsreizigersprobleem
- vierkleurenprobleem
- convex hull probleem
- stabiele huwelijken
- vier-op-een-rij, schaken, go, ... (?)
- dames op schaakbord
- torens van Hanoi
- en vele andere

**Puzzel 1:**

- a. Kun je een 8 bij 8 (schaak)bord geheel volleggen met dominostenen?  
(En zo ja, op hoeveel manieren?)
- b. Idem voor een 7 bij 7 bord
- c. Idem voor een 8 bij 8 bord waarbij de velden linksboven en rechtsonder zijn weggelaten
- d. Idem voor een 8 bij 8 schaakbord waarbij één wit veld en één zwart veld zijn weggelaten



Een dominosteen bedekt precies twee vakjes van het schaakbord. De ogen op de steen zijn voor dit probleem niet relevant. Dit geldt ook (meestal) voor de kleur van de velden van het bord.

**Puzzel 2:**

$$\begin{array}{rcccccc} D & O & N & A & L & D \\ G & E & R & A & L & D \\ \hline R & O & B & E & R & T \end{array} +$$

Elke letter stelt een cijfer voor  $(0, 1, \dots, 9)$  en verschillende letters corresponderen met verschillende cijfers. Het cijfer 0 komt niet voor als meest linkse cijfer in een getal. (Dus i.h.b. is  $D \neq 0$ ,  $G \neq 0$  en  $R \neq 0$ .)

Om het makkelijker te maken is **gegeven** dat  $D = 5$ .

Vergelijk ook Levitin, hoofdstuk 3.4, opgave 11.

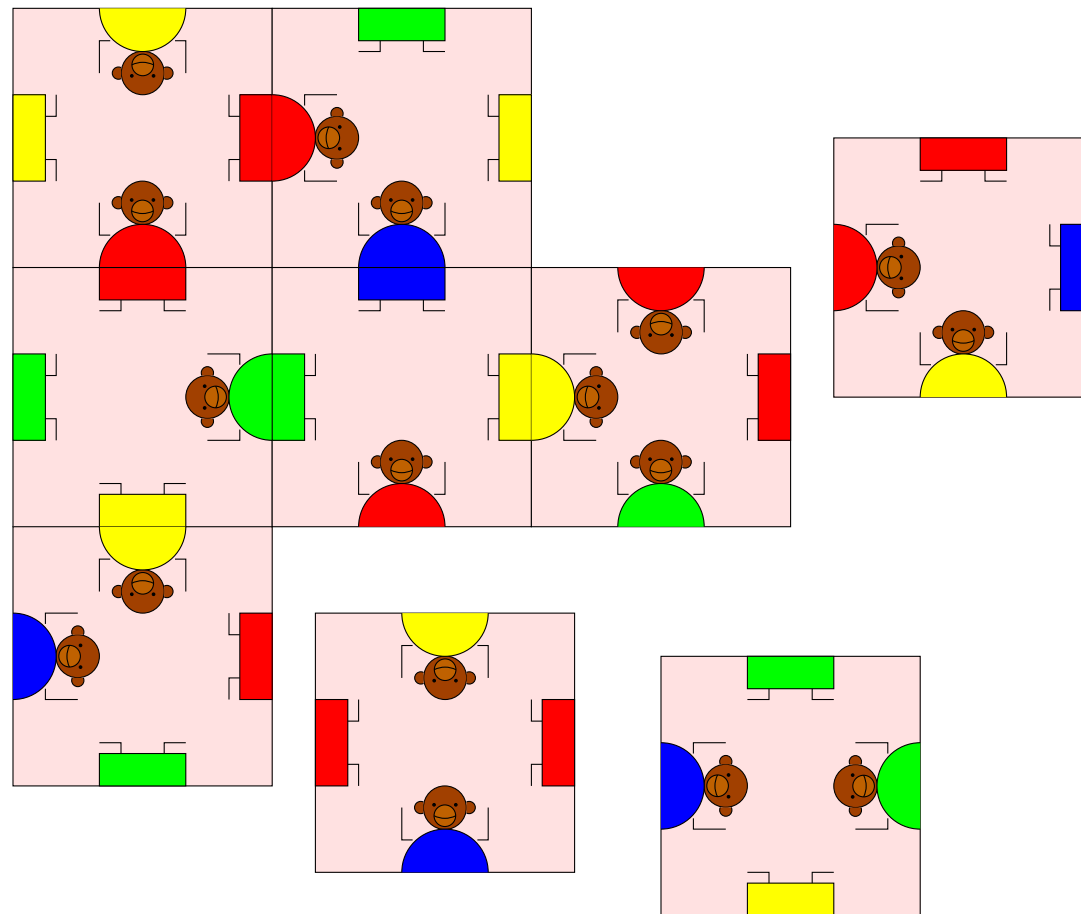
$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \\
 5 & O & N & A & L & 5 \\
 G & E & R & A & L & 5 \\
 \hline
 R & O & B & E & R & T
 \end{array}
 +$$

Hierin is  $c_i$  de overdracht, dus  $c_i = 0$  of  $1$  ( $i = 1, \dots, 5$ )

1. Uit kolom 6:  $T = 0$  en  $c_5 = 1$ .
2. Uit kolom 5:  $1 + 2L = R + 10 \cdot c_4 \Rightarrow R$  oneven.
3. Uit kolom 1:  $c_1 + 5 + G = R \Rightarrow R \geq 5 + G > 5$ , dus  $R = 7$  of  $R = 9$ .
4. Uit kolom 2:  $c_2 + O + E = O + 10 \cdot c_1 \Rightarrow c_2 + E = 10 \cdot c_1$ .  
 Als  $c_1 = 0$ , dan ( $c_2$  en)  $E = 0$ , maar we hadden al  $T = 0$ .  
 Gevolg:  $c_1 = 1$ ,  $E = 9$ ,  $c_2 = 1$  en  $R = 7$ .
5. Doe de rest zelf.



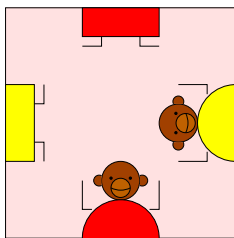
**Puzzel 3: The Monkey puzzle**



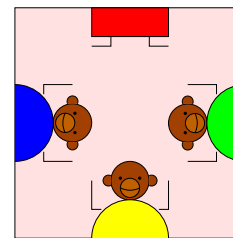
Monkey puzzle: leg de 9 stukken zo in een vierkant dat op alle aangrenzende stukken boven- en onderkant van aapjes van dezelfde kleur precies aansluiten.

Het is eenvoudig in te zien dat de puzzel van de vorige sheet opgelost kan worden. Dit is echter niet altijd het geval: het al dan niet oplosbaar zijn hangt van de stukken af.

Stel bijvoorbeeld dat we 9 dezelfde stukken hebben:



puzzel kan  
opgelost worden



puzzel kan niet  
opgelost worden

We bekijken de volgende **fundamentele datastructuren**:

- lineaire lijsten
- stapels en rijen
- priority queues
- grafen
- bomen

Zie ook: [Programmeermethoden](#).

Een **lineaire lijst** is een lineair geordende, eindige collectie gegevens van hetzelfde type.

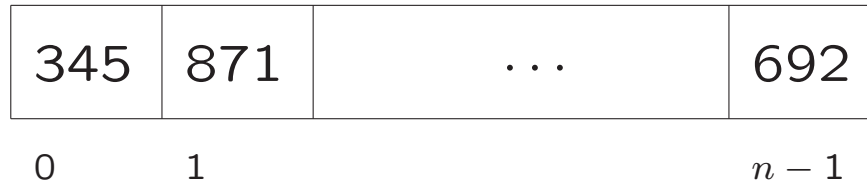
### Implementatie:

- array
- pointers
  - enkelverbonden lijst
  - dubbelverbonden lijst

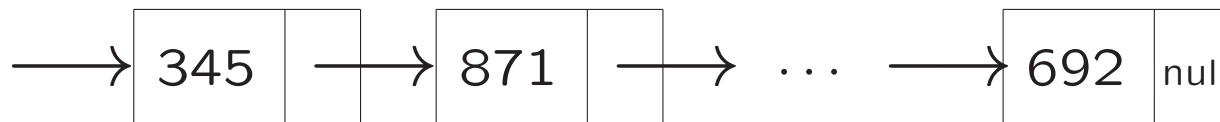
### Speciale lijsten:

- stapel
- rij
- priority queue

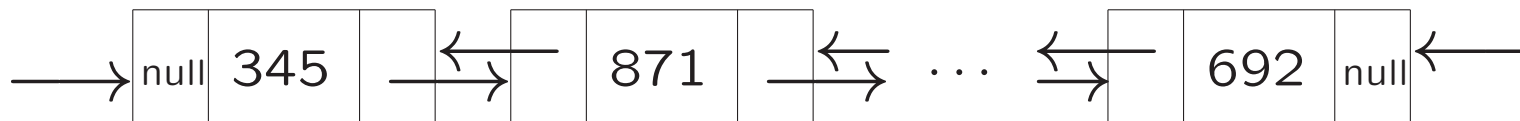
- array



- enkelverbonden lijst



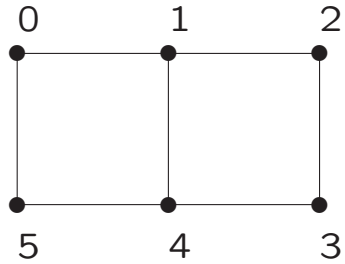
- dubbelverbonden lijst



Een **graaf**  $G$  wordt gedefinieerd als een paar  $(V, E)$ , waarbij  $V$  een eindige verzameling is van **knopen** (vertices) en  $E$  een verzameling van paren van knopen: de **takken/pijlen** (edges). Een tak/pijl  $(u, v)$  verbindt de knopen  $u$  en  $v$  met elkaar.

### Terminologie:

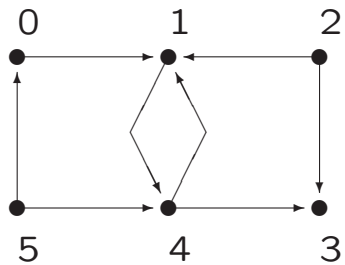
- ongerichte/gerichte graaf
- gewogen graaf
- paden en cykels
- samenhangend
- acyclisch



1.

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

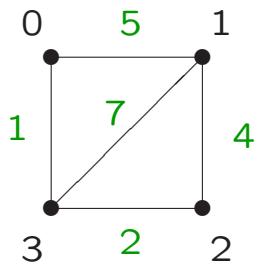
$$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0), (4, 1)\}$$



2.

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$E = \{(0, 1), (2, 1), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 0), (4, 1), (1, 4)\}$$



3.

$$V = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$E = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (0, 3), (1, 3)\}$$

**Adjacency matrix:** de **ongerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een tweedimensionaal array `int graaf[n][n]` ( $n$  het aantal knopen), waarbij `graaf[i][j]` aangeeft of er een tak tussen  $i$  en  $j$  zit.

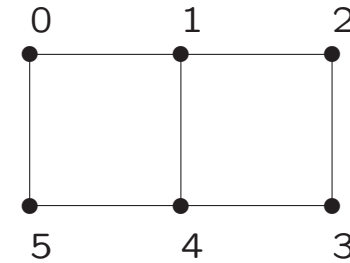
**Adjacency list:** de **ongerichte** graaf wordt gerepresenteerd door een eendimensionaal array `buur* graaf[n]` ( $n$  het aantal knopen), waarbij `graaf[i]` de ingang is tot een lijst van burenen van knoop  $i$ .

Adjacency list representatie in C++:

```
class buur
{ public:
    int knoopnummer;
    buur* volgende;
}; // buur
buur* graaf[n];
```

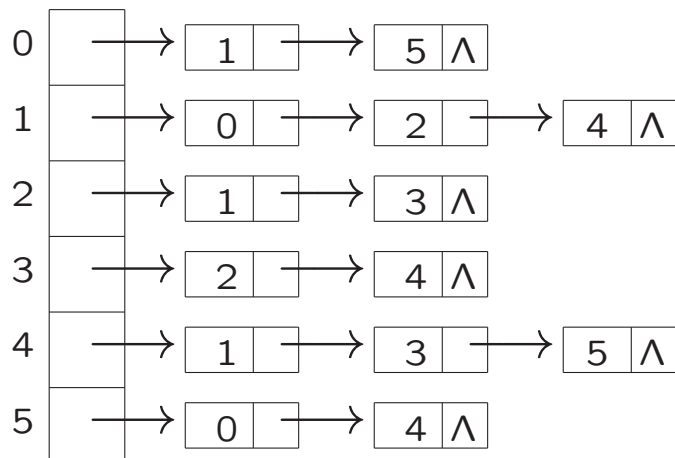


Adjacency matrix en adjacency list voor voorbeeldgraaf **1**:



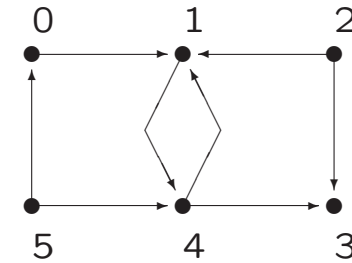
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix



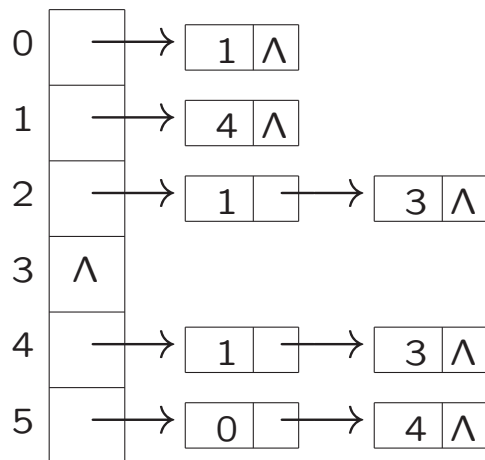
adjacency list

Adjacency matrix en adjacency list voor voorbeeldgraaf 2:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix



adjacency list

- **Lezen/leren bij dit college:**

Paragrafen 1.1, 1.2, 1.4 (t/m graafrepresentaties)

- **Werkcollege:**

dinsdag 15 februari 2022, 14.15–16.00

- **Opgaven:**

zie <https://liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek/>

- **Volgend college:**

dinsdag 15 februari 2022, 11.15–13.00 (+ weblecture)