Zesde college algoritmiek

22 maart 2019

Backtracking

Bij veel problemen gaat het erom een element met een speciale eigenschap te vinden binnen een ruimte die exponentieel groeit als functie van de invoergrootte. Dan wordt meestal backtracking gebruikt als goed alternatief voor ES.

Exhaustive search genereert alle kandidaatoplossingen en haalt daar het speciale element tussenuit.

Backtracking

- bouwt kandidaatoplossingen component voor component op,
- kijkt al tijdens de constructie of de deeloplossing nog tot een oplossing kan leiden en
- zo niet, breidt dan de deeloplossing niet verder uit

Op deze manier spaar je soms veel werk uit en kun je dus grotere probleeminstanties oplossen.

Backtracking versus exhaustive search

Exhaustive search bekijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen.
Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze oplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken.

Basisidee backtracking

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)

- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing

- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

Vergelijk

- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen. Straks!

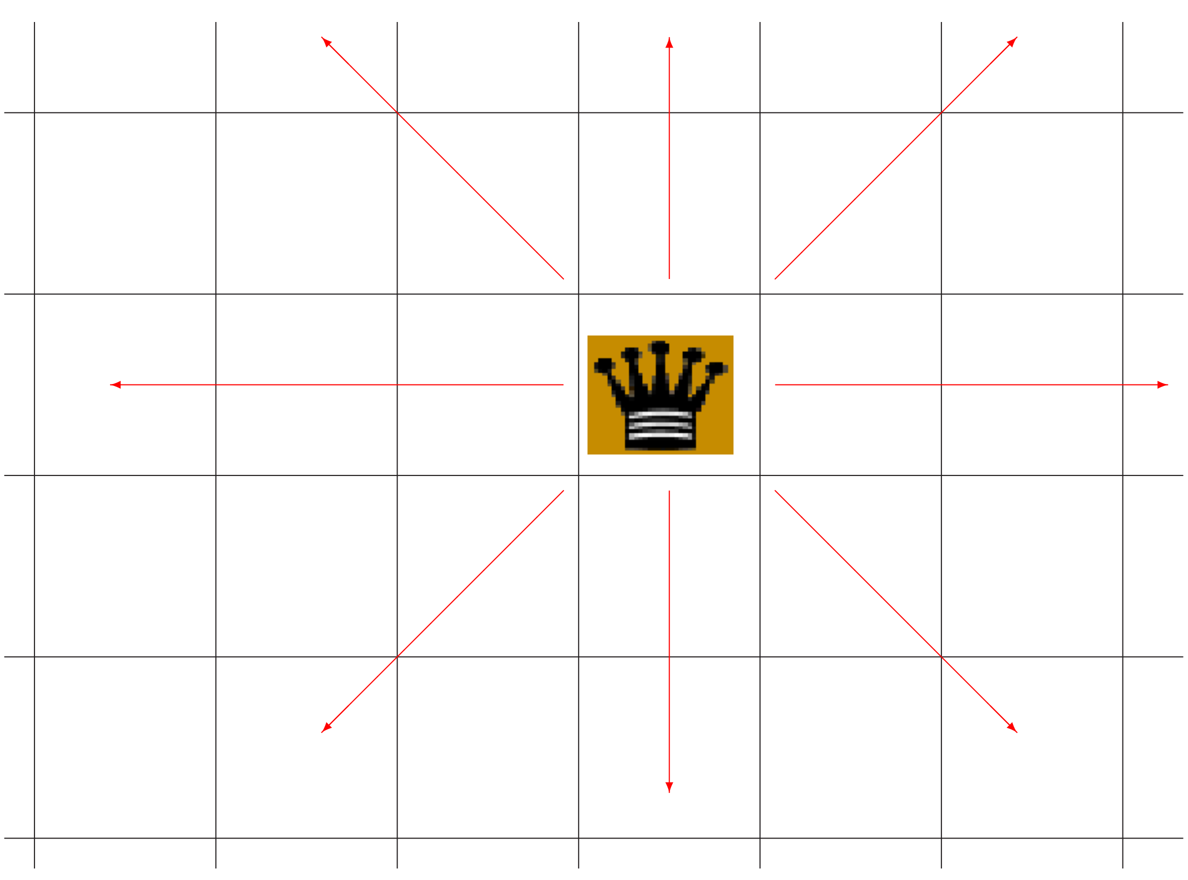
Het acht koninginnenprobleem luidt als volgt:

1. Kun je 8 dames (koninginnen) op een 8 bij 8 schaakbord zetten zonder dat zij elkaar aanvallen (= in één keer kunnen slaan)?
2. Zo ja, op hoeveel verschillende manieren kan dat?

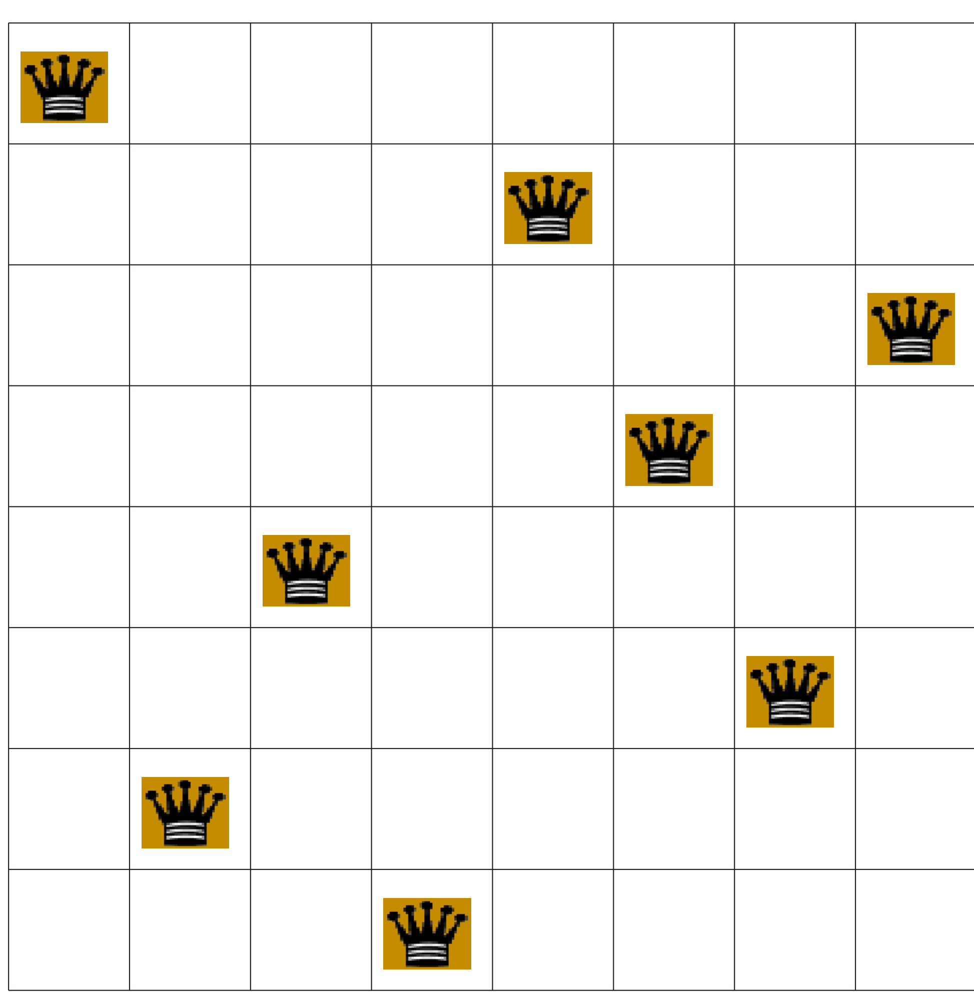
En nu **algemeen**:

Op hoeveel manieren kun je n dames op een n bij n bord plaatsen zonder dat zij elkaar aanvallen?

Een dame kan in één zet een willekeurig aantal vakjes naar links, rechts, onder, boven of diagonaal schuiven.

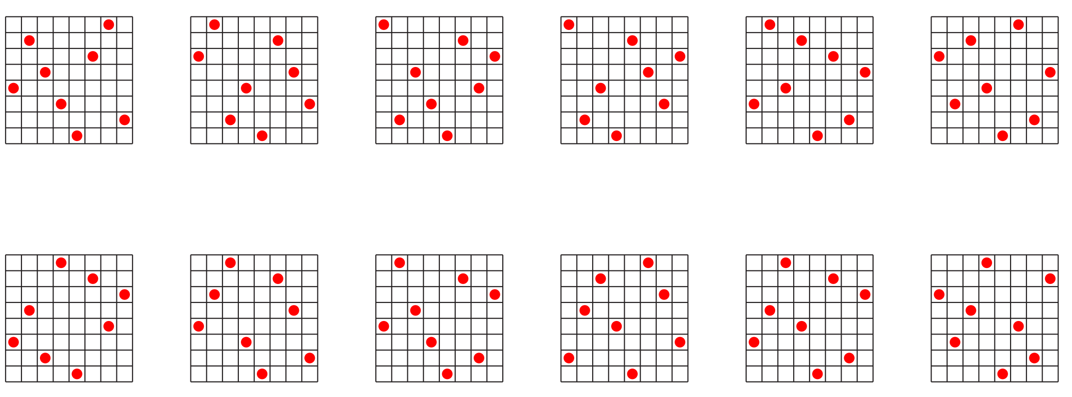


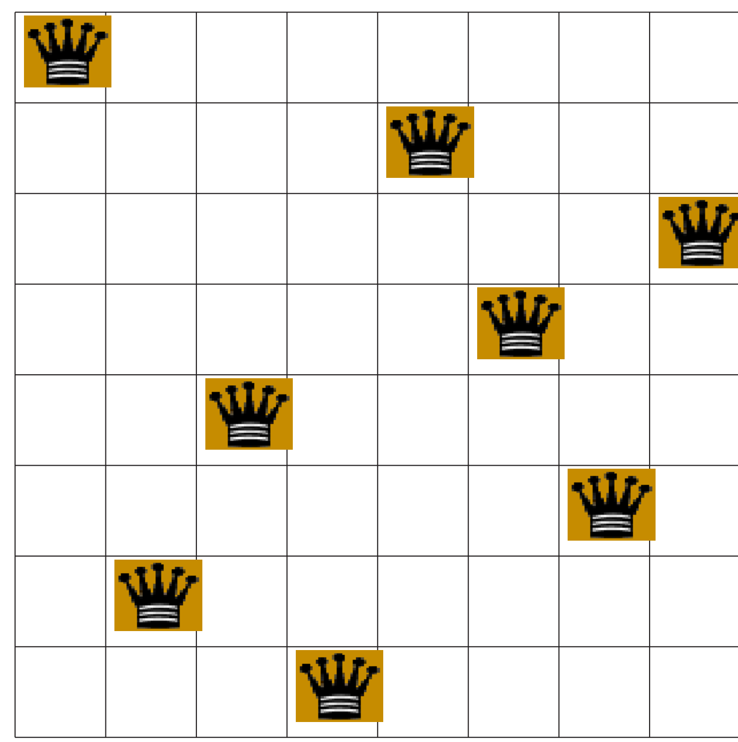
Een oplossing is onderstaande configuratie:



dit correspondeert met
de volgende permutatie:
1 5 8 6 3 7 2 4

Op het 8×8 schaakbord zijn er 92 oplossingen. In essentie zijn er 12 verschillende oplossingen, waaruit je door draaien en spiegelen (8 mogelijkheden) ze allemaal kunt maken. Er is één wat meer symmetrische oplossing.

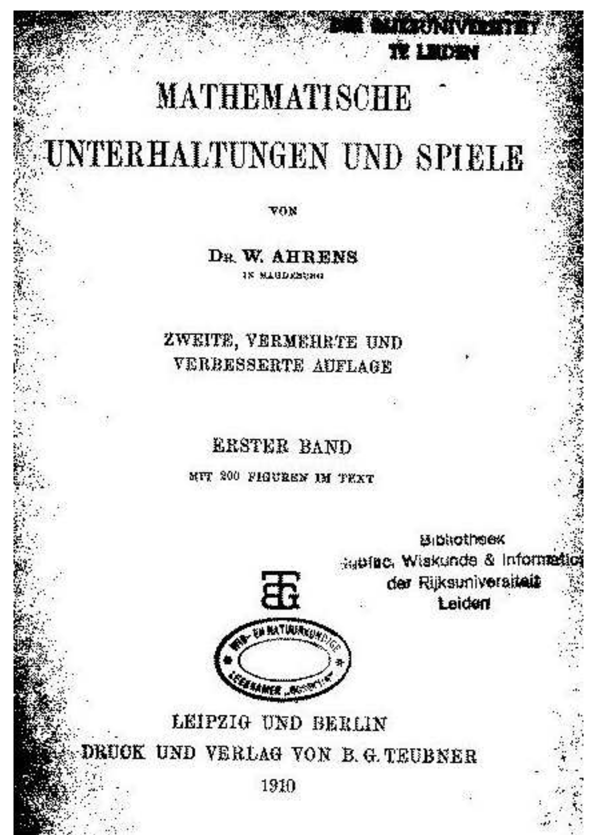




Aantallen oplossingen

n	aantal	echt aantal	$n!$
1	1	1	1
2	0	0	2
3	0	0	6
4	2	1	24
5	10	2	120
6	4	1	720
7	40	6	5040
8	92	12	40.320
9	352	46	362.880
10	724	92	3.628.800
11	2680	341	39.916.800
12	14.200	1787	479.001.600
13	73.712	9233	
14	365.596		

W. Ahrens, 1910



DER RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN

MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN UND SPIELE

VON

DR. W. AHRENS
IN MAGDEBURG

ZWEITE, VERMEHRTE UND VERBESSERTE AUFLAGE

ERSTER BAND

MIT 200 FIGUREN IM TEXT

Bibliotheek
Subfac. Wiskunde & Informatica
der Rijksuniversiteit
Leiden

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Kapitel IX.

Das Achtköniginnenproblem.

Jean Paul.

Muhammed ibn Scheref.

§ 1. **Historische Einleitung.**

In der „Illustrirten Zeitung" vom 1. Juni 1850 (Nr. 361, 14. Bd., p. 352) findet sich unter der Rubrik „Schach" „Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr Nauck in Schleusingen" folgenden Inhalts: „**Man kann 8 Schachfiguren, von denen jede den Rang einer Königin hat, auf dem Brett so aufstellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.**"[†]) In der Nummer vom 21. September

*) „Wesir" für unser „Königin". Ich entnehme dies Wort aus A. v. d. Linde, „Geschichte u. Litteratur des Schachspiels", II, p. 257.

†) Irrtümlicherweise wird diese Stelle zumeist als das erste Vorkommen unseres Problems zitiert. Die Aufgabe ist jedoch bereits in der Schachzeitung, herausgegeben von der Berliner Schachgesellschaft, Bd. III, 1848, p. 363 von einem ungenannten „Schachfreund" gestellt worden, und zwar war, wie Max Lange („Handbuch der Schachaufgaben", Leipzig 1862, p. 30, Anm. 6) „nach einer directen persönlichen Mittheilung" angibt, dieser „Schachfreund" Max Bezzel in Ansbach. — Wenn wir trotzdem oben die Geschichte des Problems an jene Naucksche Behandlung anknüpfen, so bestimmt uns hierbei der Umstand, daß die Fragestellung in der „Schachzeitung" zunächst nur 2 spezielle Lösungen (s. Schachzeitung IV, 1849, p. 40) gezeitigt und anscheinend überhaupt kein sonderliches Interesse für unser Problem

14*

n	Stammlösungen				Gesamtzahl aller Lösungen
	doppelt-symmetrische	einfach-symmetrische	un-symmetrische	zusammen	
2				0	0
3				0	0
4	1			1	2
5	1		1	2	10
6		1		1	4
7		2	4	6	40
8		1	11	12	92
9		4	42	46	352
10		3	89	92	724
11		12	329	341	2680
12	4	18	1744	1766	14032

Een brute force (exhaustive search) aanpak:

> Genereer alle mogelijke configuraties van n dames op een n bij n bord, en controleer van elk daarvan of de dames elkaar al dan niet aanvallen.

Het aantal te controleren kandidaatoplossingen is hier exponentieel:

- n^n onder de aanname: één dame per rij
- $n!$ onder de aanname: één dame per rij en één per kolom; dit zijn gewoon alle permutaties van 1 t/m n

Basisidee backtracking

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)

- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing

- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

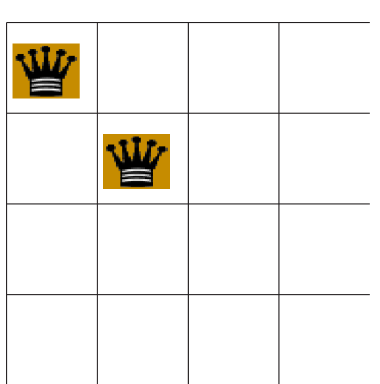
Vergelijk

- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen. Straks!

Backtracking versus exhaustive search

Exhaustive search bekijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen. Dat zijn hier alle permutaties van 1 t/m n.
Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze deeloplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken. *Soms* spaar je zo heel veel uit.

Voorbeeld:

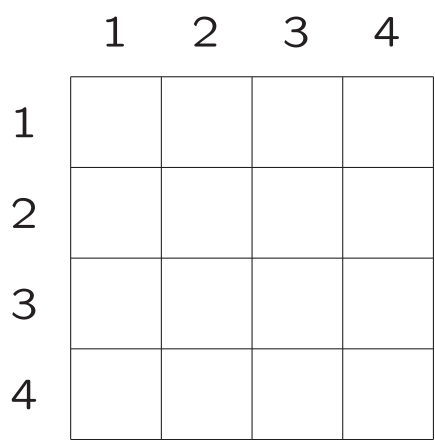


Alle $(n-2)!$ kandidaatoplossingen met de eerste twee dames op de aangegeven posities behoeven niet verder onderzocht te worden!

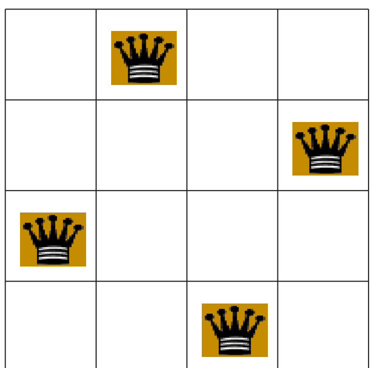
Dames $n = 4$

Dames $n = 4$

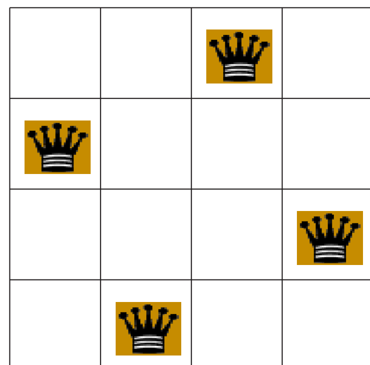
Oplossingen dames: $n = 4$



oplossing 1



oplossing 2



Alle oplossingen voor het n bij n bord kunnen we vinden met behulp van backtracking.

- plaats de dames een voor een
- probeer de dame in alle kolommen:
  - als ze geplaatst kan worden, ga dan op dezelfde manier verder met de *volgende* dame
  - zo niet: probeer haar in de volgende kolom (keuze herzien)
- als ze nergens geplaatst kan worden, verschuif dan de *vorige* dame: eerdere keuze herzien!

Als de `rij`-de dame in alle n kolommen is geprobeerd, wordt de dame uit de vorige rij herzien, dus een plek naar rechts gezet, etc, . . .

Bij de recursieve oplossing wordt automatisch een niveau teruggesprongen, bij de iteratieve oplossing moeten we dit zelf expliciet doen.

Zetdames recursief (opzet)

```
void zetdames (int n, int rij, int stand[], int & aantal) {
   // probeert de rij-de dame neer te zetten; de eerste rij-1
   // dames staan al goed: backtracking met recursie













}  // zetdames
```

Zetdames recursief

```
void zetdames (int n, int rij, int stand[], int & aantal) {
  // probeert de rij-de dame neer te zetten; de eerste rij-1
  // dames staan al goed: backtracking met recursie
    int kolom;
    if (rij == n+1) {
        drukaf (n, stand); // druk goede stand af
        aantal++; // en tel het aantal goede standen
    }  // if
    else
      for (kolom = 1; kolom <= n; kolom++) {
          stand[rij] = kolom;
          if (geenaanval (rij, stand))
              zetdames (n, rij+1, stand, aantal);
      }  // for
}  // zetdames
```

Het hele programma

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int MAX = 20;

bool geenaanval (int rij, int stand[ ]) {
    bool veilig = true;
    int hulprij = 1;
    while ( veilig && ( hulprij < rij ) ) {
        veilig =
            (  ( stand[rij] != stand[hulprij] )
            && ( stand[rij] - stand[hulprij]
                           != rij - hulprij )
            && ( stand[rij] - stand[hulprij]
                           != hulprij - rij) );
        hulprij++;
    } //while
    return veilig;
} //geenaanval

void drukaf (int n, int stand[ ]) {
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        cout << stand[i] << " ";
    cout << endl;
} //drukaf
```

```
void zetdames(int n, int rij, int stand[ ], int & aantal)
    int kolom;
    if ( rij == n + 1 ) {
        drukaf (n, stand);
        aantal++;
    } //if
    else
        for ( kolom = 1; kolom <= n; kolom++ ) {
            stand[rij] = kolom;
            if ( geenaanval (rij, stand) )
                zetdames( n, rij+1, stand, aantal );
        } //for
} //zetdames

int main ( ) {
    int stand[MAX];
    int grootte;
    int teller = 0;
    do {
        cout << "Grootte schaakbord ( < "
             << MAX << " ) .. ";
        cin >> grootte;
    } while ( grootte < 1 || grootte >= MAX );
    zetdames( grootte, 1, stand, teller );
    cout << endl << "Aantal: "
         << teller << endl << endl;
    return 0;
} //main
```

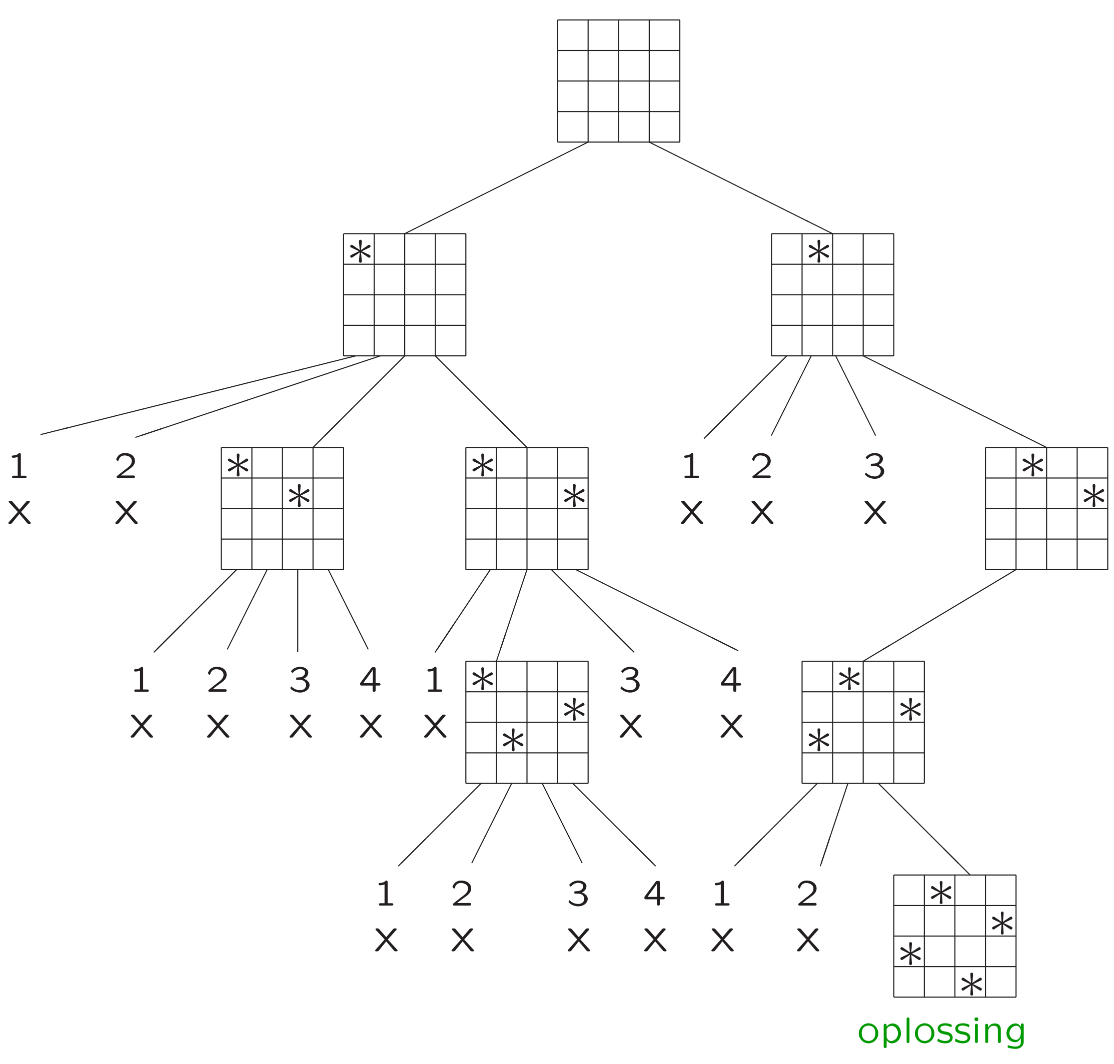
Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) {         // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;  // zet eerste dame klaar
    while (         ) {
        stand[rij]++;           // volgende kolom








    } // while
} // zetdames
```

Het kan natuurlijk ook **niet-recursief**:

```
void zetdames (int n) {          // niet recursief
    int stand[MAX];
    int rij = 1; stand[1] = 0;   // zet eerste dame klaar
    while ( rij > 0 ) {
        stand[rij]++;            // volgende kolom
        while ( ( stand[rij] <= n ) && ( ! geenaanval( rij, stand ) ) )
            stand[rij]++;        // eerste de beste goede kolom
        if ( stand[rij] <= n )
            if ( rij == n )      // n-de dame gezet
                drukaf (n, stand);
            else {               // nog niet alle dames gezet
                rij++;
                stand[rij] = 0;
            }
        else        // alle kolommen van een rij geprobeerd
            rij--;  // vorige dame herzien
    } // while
} // zetdames
```

State-space tree dames



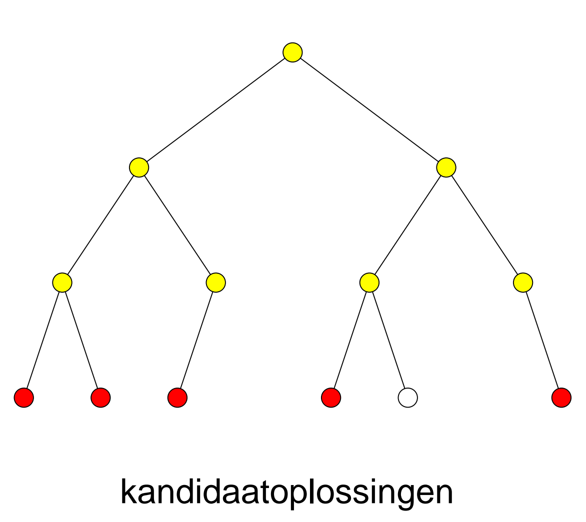
x: deeloplossing niet verder uitbreiden, keuze herzien

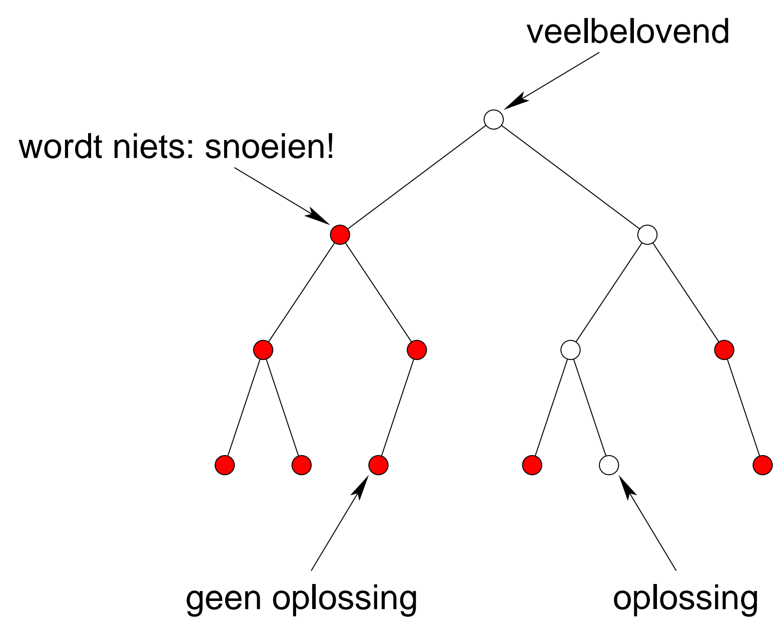
Om de werking van backtracking te *beschrijven* kunnen we een state-space *tree* (toestand-actie-*boom*) gebruiken.

- speciaal soort toestandsruimte
- toestand (=knoop) $\Longleftrightarrow$ deeloplossing;
  actie (=tak) $\Longleftrightarrow$ keuze uitbreiding deeloplossing
- blad $\Longleftrightarrow$ (kandidaat)oplossing
- pad van wortel naar blad $\Longleftrightarrow$ stap-voor-stap-constructie van (kandidaat)oplossing

Exhaustive search (met stap-voor-stap-constructie van kandidaatoplossingen) doorloopt de hele boom en evalueert alle bladeren. Backtracking stopt met het doorlopen van een subboom bij een knoop als de betreffende knoop nooit tot een oplossing kan leiden (en backtrackt dan naar de ouder van die knoop om van daaruit verder te zoeken).

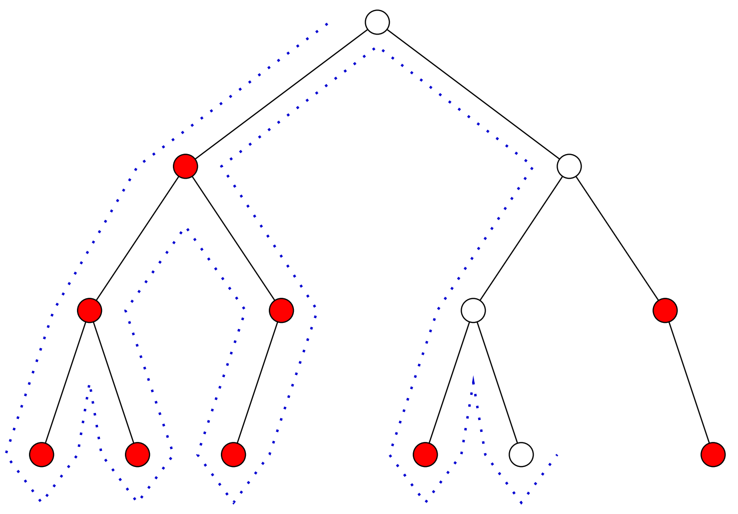
State-space tree -1-



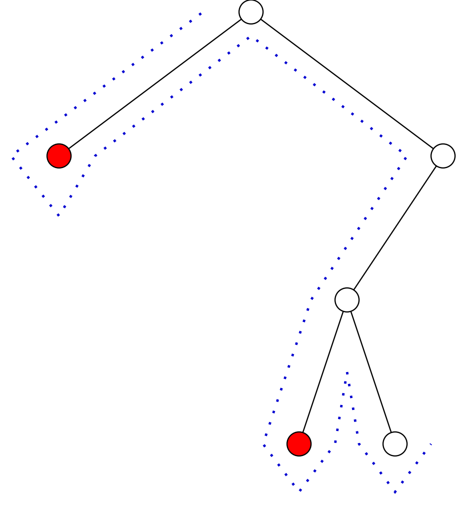


Exhaustive search: de hele boom wordt bekeken (tot een goede oplossing is gevonden)

Backtracking: hele subbomen kunnen soms worden gesnoeid



Backtracking doorzoekt de state-space tree via depth first search.



Als het meezit wordt er flink gesnoeid.

De volledige toestandsruimte (state space) is exponentieel:

- 1 begintoestand (leeg bord)

- $n!$ eindtoestanden (n dames geplaatst)($*$)

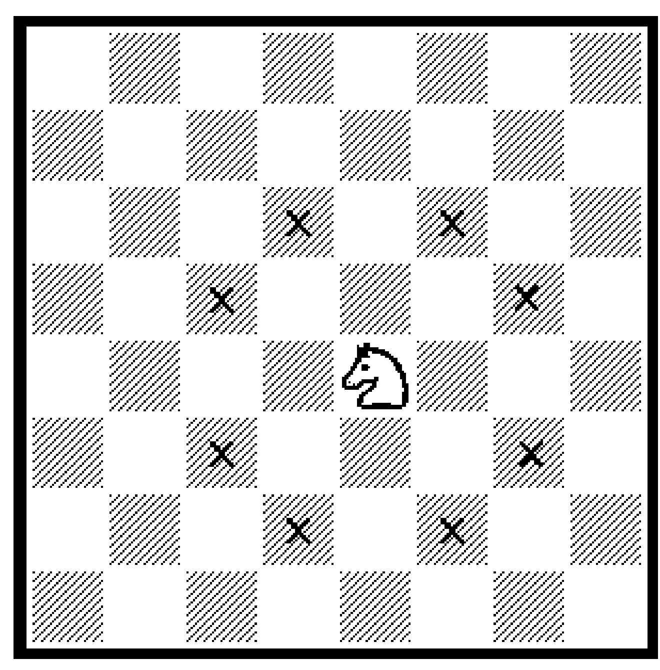
- $n + n * (n-1) + n * (n-1) * (n-2) + \ldots + n * (n-1) * \ldots * 2$ tussengelegen toestanden (de eerste 'zoveel' dames geplaatst)($*$)

Backtracking zal voor grote probleeminstanties toch exponentieel zijn.

($*$) We bekijken alleen toestanden met hooguit één dame per rij en hooguit één per kolom.

Vraag:

Hoeveel verschillende series van $m * n - 1$ sprongen van het paard zijn er op een m bij n bord, zodat elk veld precies één keer bezocht wordt?



beweging van het paard

1	14	17	20	11	8	5
16	19	12	3	6	21	10
13	2	15	18	9	4	7

een oplossing op het 3 bij 7 bord

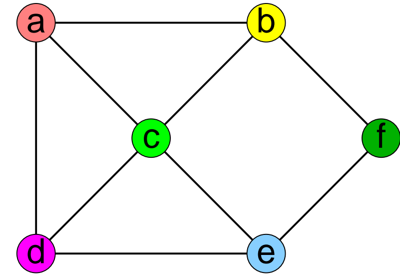
Genereer alle permutaties van 1 t/m n met backtracking.

```
void permutaties( int n, int perm[ ], int hierzo ) {
    int i;
    if ( hierzo == n + 1 )
        drukaf( perm, n ); // permutatie gevonden
    else {
        for ( i = 1; i <= n; i++ ) {
            perm[hierzo] = i;
            if ( ! aanwezig( perm, i, hierzo ) )  // test of i
               // al in perm[1] t/m perm[hierzo-1] voorkomt
               permutaties( n, perm, hierzo + 1 );
        } // for
    } // else
} // permutaties
```

Vraag: wat heeft dit met torens op een schaakbord te maken?

Definitie: Een Hamiltonkring in een (ongerichte) graaf is een kring die elke knoop precies één keer aandoet.

Voorbeeld: a b f e c d a is een Hamiltonkring in nevenstaande graaf, echter a b c d e f a is geen Hamiltonkring.



Probleem: vind een Hamiltonkring in een gegeven ongerichte graaf.

Exhaustive search: genereer alle $(n-1)!$ kandidaatoplossingen (permutaties van de knopen) en controleer daarna van elk of het een Hamiltonkring voorstelt.

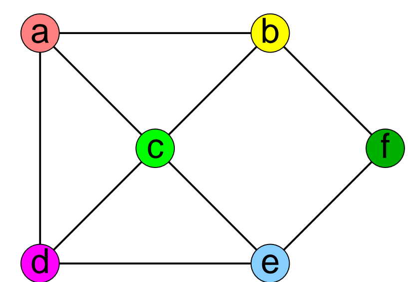
Backtracking: genereer de mogelijke Hamiltonkringen stap voor stap* en controleer tijdens de constructie al of de deeloplossing wel aan de restricties† voldoet.
Kies in elke uitbreidingsstap steeds de eerstvolgende **buurknoop** (in een of andere volgorde) en controleer hiervan of deze nog niet geweest is in het reeds geconstrueerde deelpad. Blijkt die keuze toch (hier of verderop in de constructie) op niets uit te lopen, kies dan de volgende buurknoop. Als er geen buurknopen meer zijn kan het deelpad blijkbaar niet meer uitgebreid worden en moet je je vorige keuze herzien.

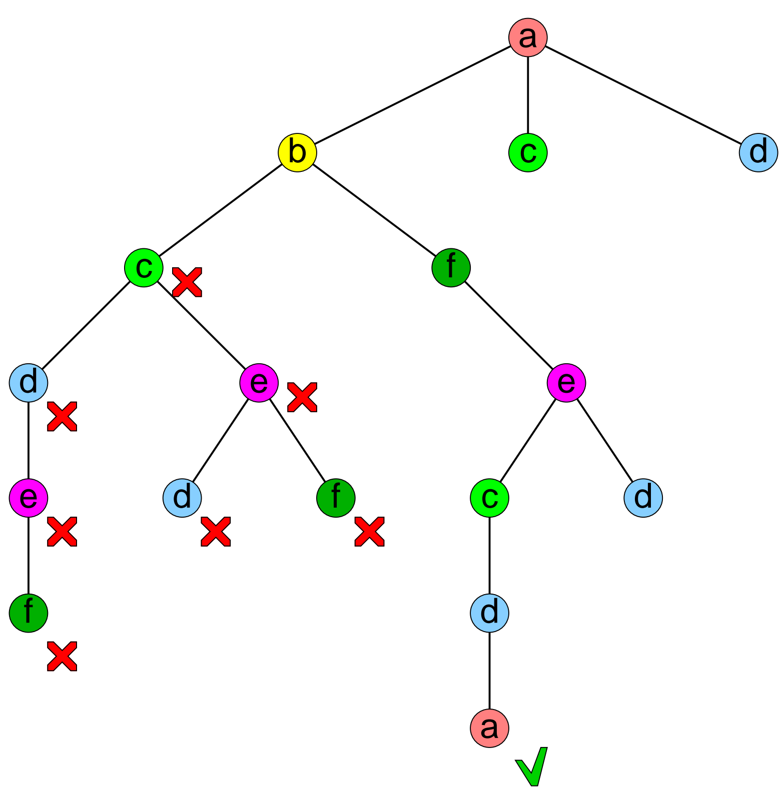
---

*hier: tak voor tak of knoop voor knoop

†alle knopen verschillend; tak tussen opeenvolgende knopen

Een beschrijving van de werking van het backtracking-algoritme voor het vinden van een Hamiltonkring in de voorbeeldgraaf wordt gegeven door de volgende state space tree:



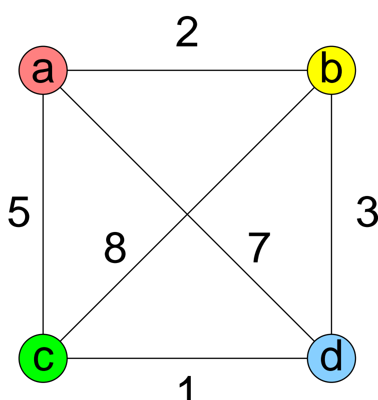


- breid het pad telkens met één knoop uit (hier: keuzes in alfabetische volgorde)
- uitbreidingen met knopen die al eerder voorkwamen in het pad zijn niet weergegeven
- in de knopen met een rood kruis backtrackt het algoritme zodra blijkt dat die niet tot een oplossing leiden

Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn.
Gevraagd: de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.
Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (complete) graaf.

Voorbeeld:



minimale route:
a b d c (ofwel a b d c a)
(of a c d b (ofwel a c d b a))

Merk op: elke permutatie van de knopen is een Hamiltonkring, dus:

- genereer alle permutaties van de knopen (beginnend bij knoop a) **stap voor stap**, door deelpermutaties (= beginstuk Hamiltonkring) verstandig uit te breiden:
- houd de tot dusver gevonden minimale lengte `min` bij
- **controleer** of de lengte van de deelpermutatie kleiner is dan `min`
- zo ja, ga dan op **dezelfde** manier door met uitbreiden
- zo nee, dan heeft het geen zin om door te gaan, dus **herzie je meest recente keuze**

Basisidee backtracking

- bouw een oplossing stap voor stap op en controleer steeds of de deeloplossing in conflict komt met de restricties (en nog wel tot een oplossing kan leiden)

- op elk moment kun je kiezen uit een aantal mogelijke vervolgstappen; maak een keuze en ga langs die weg verder met het opbouwen van de oplossing

- als een keuze op niets uitloopt, herzie je deze keuze en probeer je een andere mogelijkheid

Vergelijk

- het vinden van de uitgang in een doolhof: loop steeds verder en als je bij het zoeken vastloopt, ga terug op je pad om het laatste open alternatief te proberen. Straks!

Backtracking versus exhaustive search

Exhaustive search bekijkt *alle* volledige kandidaatoplossingen.
Backtracking controleert telkens van deeloplossingen of ze nog aan de eisen/restricties voldoen; zo niet, dan weet je zeker dat alle uitbreidingen van deze oplossing ook niet voldoen, dus die hoef je dan niet meer expliciet te bekijken.

Voorbeeld
Gegeven de rij $A =$ `3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 7`.
Gevraagd: de/een langste *stijgende* deelrij (met volgorde der elementen als in A zelf).

Exhaustive search. Genereer alle 2^{10} deelrijtjes van A en controleer van elk daarvan of hij stijgend is en bepaal wat de langste deelrij is.

Backtracking. Bouw de deelrijtjes stap voor stap op (hoe?) en controleer na elke stap of het deelrijtje nog wel stijgend is. Zo niet, dan hoeft het rijtje niet meer uitgebreid te worden (het kan toch niets worden). Houd de lengte van het deelrijtje bij en vergelijk die met de lengte van de tot dusver gevonden langste deelrij.

Deze methode kan erg veel werk uitsparen. Bijvoorbeeld het deelrijtje `3, 1` is al niet stijgend, dus alle 2^8 deelrijtjes van A die met `3, 1` beginnen zeker ook niet. Deze hoeven bij backtracking dus niet allemaal te worden gegenereerd.

Probleem:
Gegeven een verzameling $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ van positieve (> 0) gehele getallen en een geheel getal d. Laat S oplopend gesorteerd zijn. Vind een deelverzameling (of alle deelverzamelingen) van S waarvan de som der getallen gelijk is aan d.

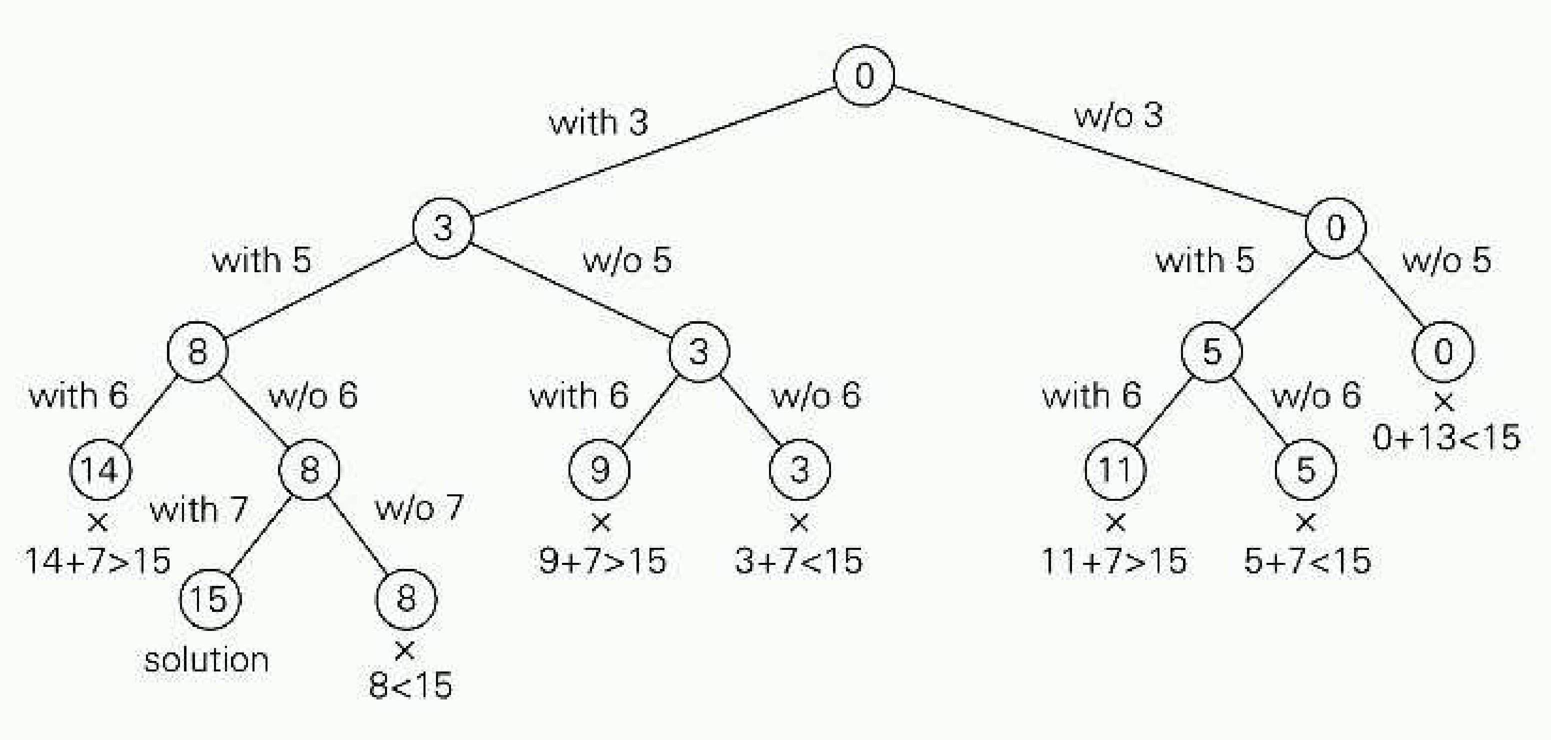
Voorbeelden:
$S = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ en $d = 9$. Er zijn twee oplossingen, namelijk $\{1, 2, 6\}$ en $\{1, 8\}$.
$S = \{3, 5, 6, 7\}$ en $d = 15$. Er is één oplossing: $\{3, 5, 7\}$.

Exhaustive search: genereer alle 2^n deelverzamelingen van S en controleer of hun som gelijk is aan d.

De stap-voor-stap constructie van deeloplossingen doen we (bijvoorbeeld) zo: gegeven een deeloplossing (= een veelbelovende deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$), dan zijn er twee mogelijke vervolgstappen: óf s_{i+1} wordt toegevoegd, óf s_{i+1} wordt niet toegevoegd.

Backtracking bekijkt zo ook alle deelverzamelingen, maar hoeft ze niet allemaal volledig te genereren. Een (veelbelovende) deelverzameling van $\{s_1, s_2, \ldots, s_i\}$ met som s' hoeft niet verder uitgebreid te worden als $s' + s_{i+1} > d$ (*), of als $s' + \Sigma_{j=i+1}^{n} s_j < d$.

Opmerking:
Als (*) geldt levert elke uitbreiding, met welke s_j ($j \geq i+1$) dan ook een te grote totaalsom op. Dus herzie je vorige keuze. Hier is gebruikt dat S oplopend gesorteerd is.



Volledige state-space tree bij toepassing van backtracking op probleeminstantie $S = \{3, 5, 6, 7\}$ en $d = 15$ (waarbij alle oplossingen gezocht worden). De knopen stellen deeloplossingen voor. Het getal in een knoop is de som van de s_j uit de corresponderende deelverzameling. De ongelijkheid onder een blad geeft aan waarom daar backtracking plaatsvindt.

Knapzakprobleem

Gegeven n objecten, met gewicht $w_1, \ldots, w_n$ en waarde $v_1, \ldots, v_n$, en een knapzak met capaciteit W.

Gevraagd: de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht $\leq W$).

Voorbeeld:

object	gewicht	waarde
1	8	42
2	3	14
3	4	40
4	5	27

knapzakcapaciteit 12

- genereer de deelverzamelingen **stap voor stap**, bijvoorbeeld door steeds aan een goede deelverzameling van de objecten 1 t/m i achtereenvolgens object $i+1$ of $i+2$ of $\cdots$ n toe te voegen (mogelijke **keuzes**)

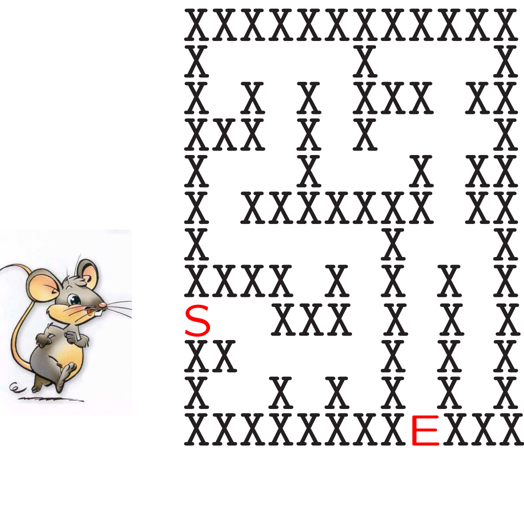
- **controleer** of het totaalgewicht van de aldus uitgebreide verzameling nog steeds $\leq W$ is

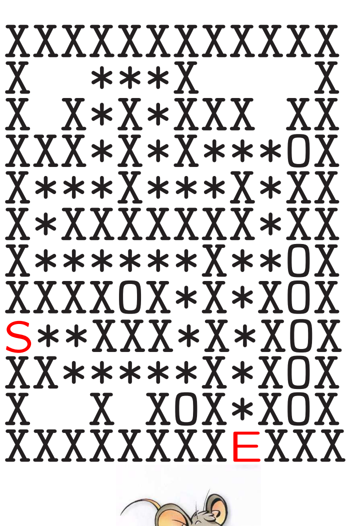
- zo nee, **herzie** dan **je keuze** (en probeer het volgende object)

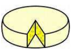
- zo ja, ga dan op **dezelfde** manier verder

- houd ook de totaalwaarde van de (deel)verzamelingen bij en de tot dusver gevonden maximale waarde

Gegeven een rechthoekig doolhof. Gevraagd wordt een pad van Start naar Eind, waarbij alleen horizontaal en verticaal gelopen mag worden.







```
bool dwaal(int x, int y) {
// is er een pad van (x,y) naar (x_eind,y_eind) ?
    int richting, x_volgende, y_volgende;
    if ( ( x == x_eind ) && ( y == y_eind ) ) { // gevonden!
        doolhof[x][y] = '*';
        return true;
    }
    else if ( doolhof[x][y] != ' ' )  // geen vrije plek
        return false;
    else {
        doolhof[x][y] = '?'; // tijdelijk markeren; voorkomt oneindig loopen
        for ( richting = OOST; richting <= NOORD; richting++ ) {
            x_volgende = volgende_x(x,richting);
            y_volgende = volgende_y(y,richting);
            if ( dwaal(x_volgende,y_volgende) ) {
                doolhof[x][y] = '*';
                return true;
            }
        }
        doolhof[x][y] = 'O'; // afgehandeld:
        return false;        // geen rechtstreeks pad via deze (x,y)
    }
}
```

Laten oplossingen van een bepaald probleem van de vorm $(X[1], X[2], \ldots, X[m])$ zijn en zij S_i de verzameling waarden die $X[i]$ kan aannemen. De algemene vorm van een backtracking algoritme is dan:

```
backtrack(X[1···i])::
// X[1···i] is een veelbelovende deeloplossing, consistent met
// de restricties; we zoeken alle oplossingen
if X[1···i] is een oplossing then
  print(X[1···i]);
else
  for elke x ∈ S_{i+1} consistent met X[1···i] en de restricties do
      X[i+1] := x;
      backtrack(X[1···i+1]);
  od
fi
```

- **Lezen/leren bij dit college:**
  Paragraaf 12 inl., 12.1

- **Werkcollege** backtracking
  vanmiddag, 13.30–15.15, in deze zaal

- **Vragenuur** programmeeropdracht 1
  vanmiddag, 15.30–17.15, kleine computerzalen Snellius

- **Opgaven:**
  zie `http://www.liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek/`

- **Programmeeropdracht 2...**

- **Volgend college:**
  29 maart 2019, 09.00–10.45, Van Steenis E004