Vierde college algoritmiek

23/24 februari 2017

Complexiteit en Brute Force

Complexiteit (= tijdcomplexiteit) van een algoritme:

- = hoeveelheid werk verricht door het algoritme
- hangt meestal af van de grootte van de invoer: hoe groter de invoer, hoe groter de complexiteit
- wordt bepaald door het aantal keer dat de basisoperatie wordt uitgevoerd
- het belangrijkst is de (asymptotische) groei
- wordt vaak uitgedrukt in O-notatie (orde van grootte)
- hangt vaak ook af van het soort invoer: worst case, best case, average case

Voorbeeld 1:

```
// invoer: array a[0···n − 1] bestaande uit n reals
// uitvoer: de grootste waarde
```

```
max := a[0];
for i := 1 to n − 1 do
    if ( a[i] > max ) then ⟵ basisoperatie
        max := a[i];
    fi
od
return max;
```

Complexiteit: $C(n) = n - 1 \in \Theta(n)$

Voorbeeld 2:

```
// invoer: array a[0···n−1] bestaande uit n reals
// uitvoer: true als alle n waarden verschillen
```

for $i := 0$ **to** $n-2$ **do**
  for $j := i+1$ **to** $n-1$ **do**
    if ($a[i] = a[j]$) **then** ⟵ basisoperatie
      return false; **fi**
  od
od
return true;

Best case complexiteit: $B(n) = 1 \in \Theta(1)$

Worst case complexiteit:

$$W(n) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = \frac{1}{2} n(n-1) \in \Theta(n^2)$$

O-notatie beschrijft het asymptotisch gedrag:

$f \in O(g) \iff \exists c > 0$ en $\exists n_0 \geq 0$ zodat $\forall n > n_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

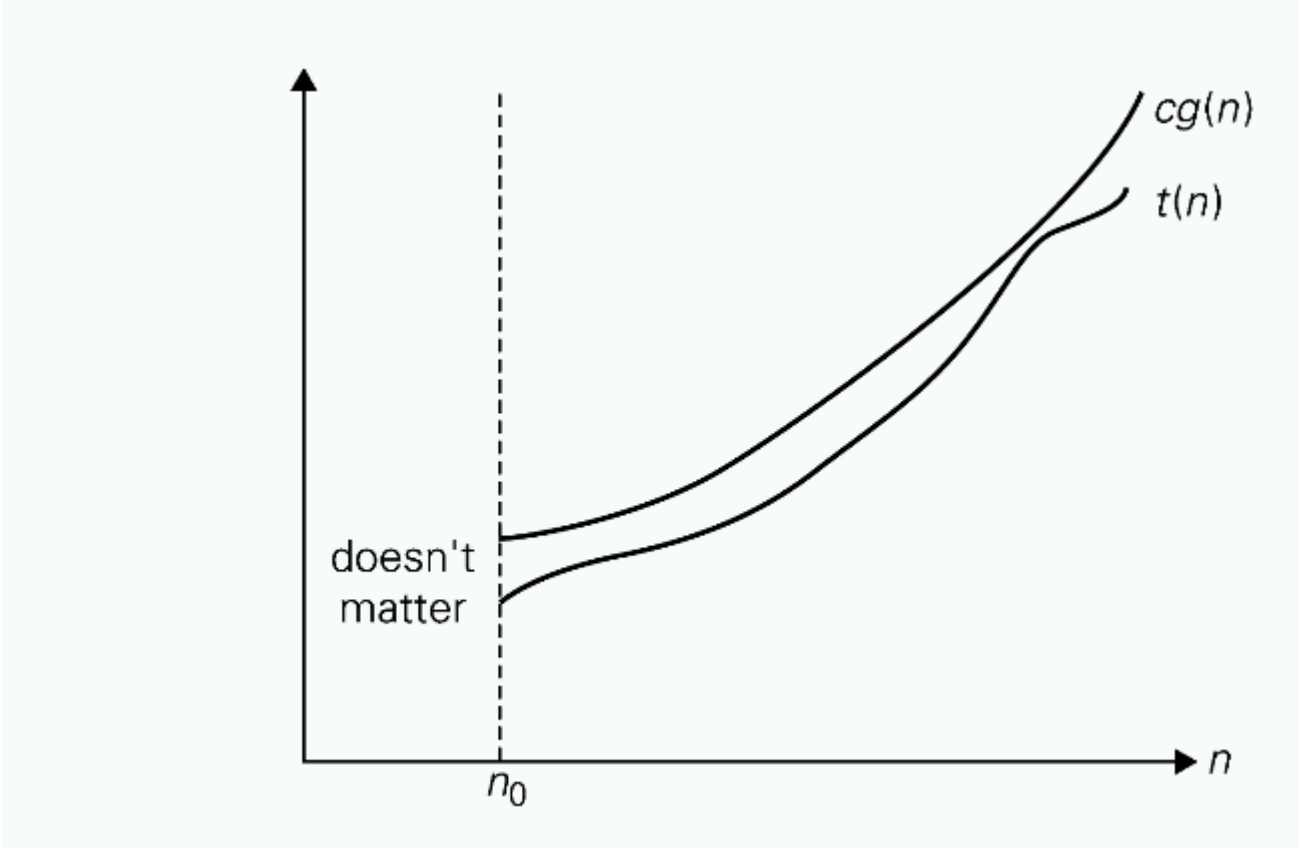
$f \in \Omega(g) \iff \exists c' > 0$ en $\exists n_0 \geq 0$ zodat $\forall n > n_0$:

$$f(n) \geq c' \cdot g(n)$$

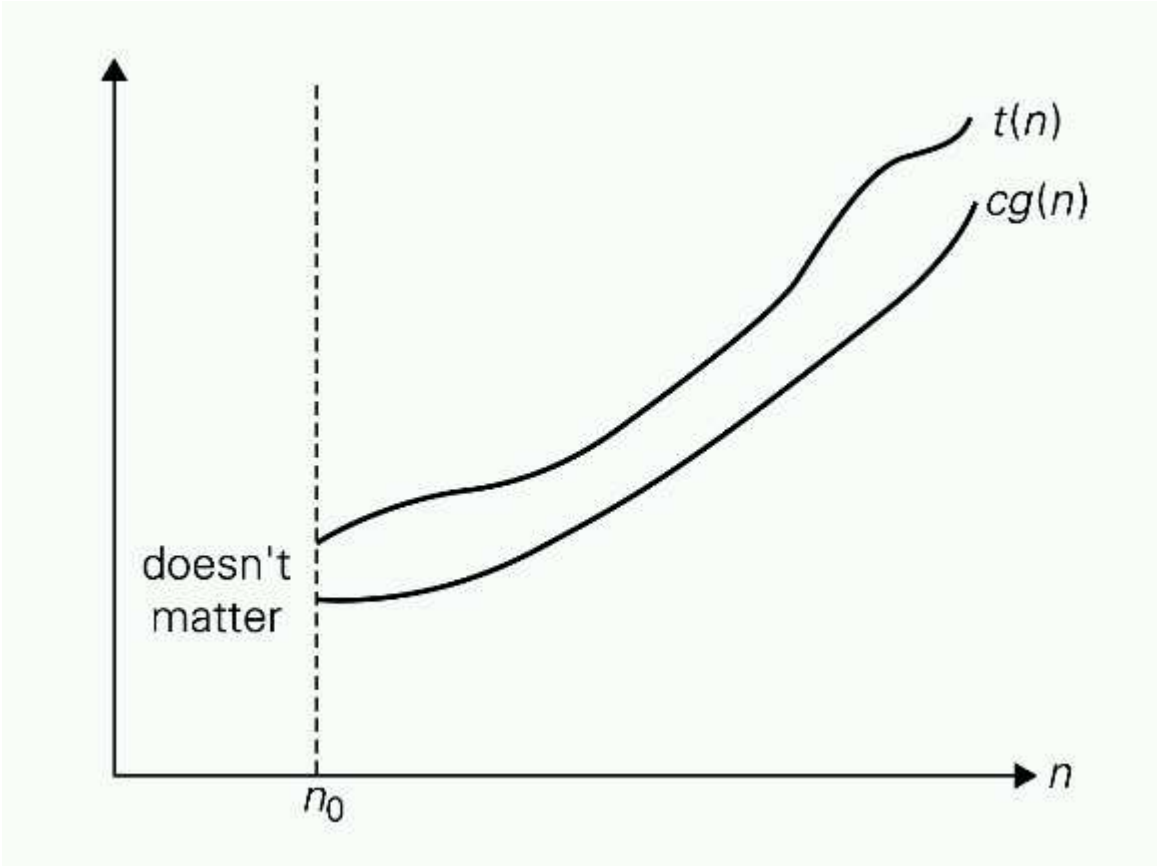
$f \in \Theta(g) \iff \exists c_1, c_2 > 0$ en $\exists n_0 \geq 0$ zodat $\forall n > n_0$:

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

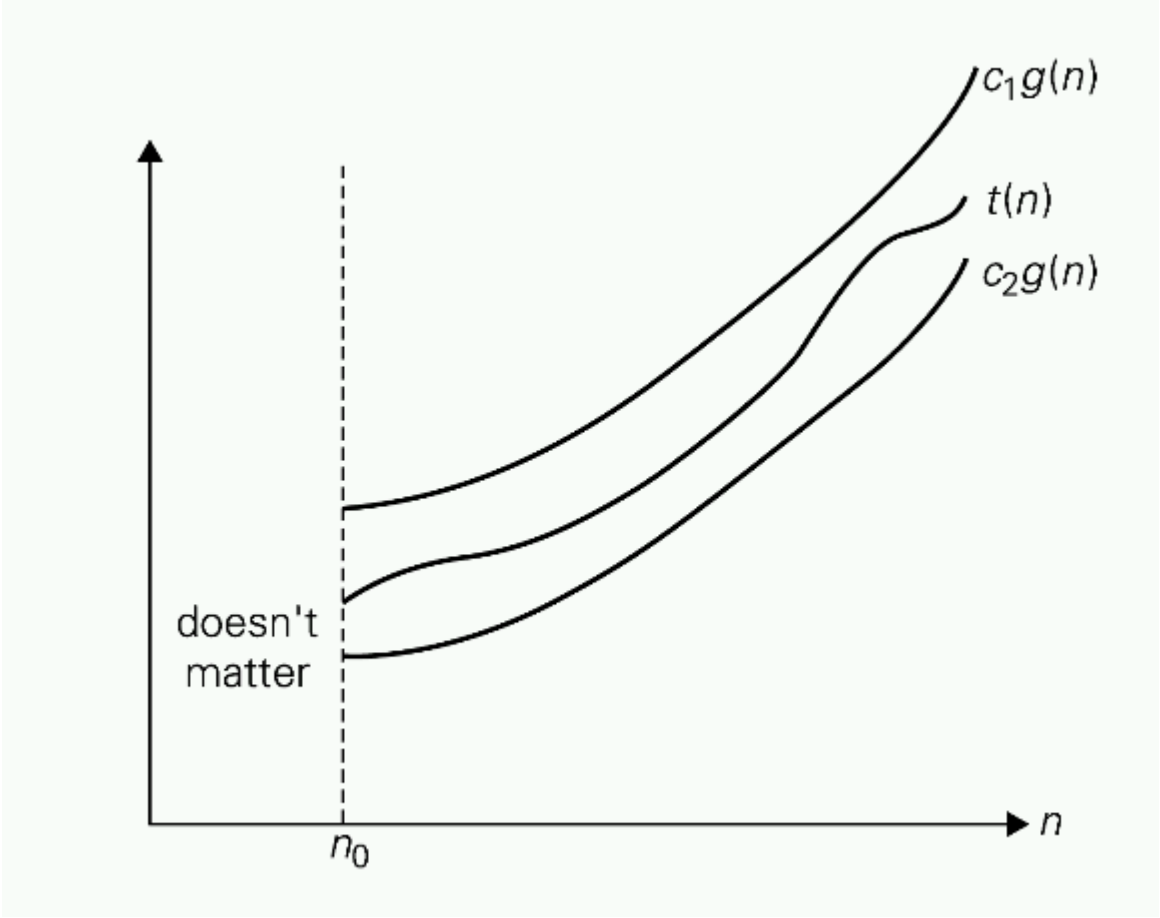
Aangezien zowel f als g in onze toepassingen de complexiteit van een algoritme voorstelt is hier steeds $f > 0$ en $g > 0$.



$t \in O(g)$: $t(n)$ groeit niet sneller dan $g(n)$



$t \in \Omega(g)$: $t(n)$ groeit minstens zo snel als $g(n)$



$t \in \Theta(g)$: $t(n)$ groeit even snel als $g(n)$

Stelling:

(1) $$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \iff f \in \Theta(g)$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f \in O(g), \text{ maar } f \notin \Theta(g)$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff g \in O(f) \text{ maar } g \notin \Theta(f)$$

N	10	50	100	300	1000
$\log_2 N$	3	5	6	8	9
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \cdot \log_2 N$	33	282	665	2469	9966
N^2	100	2500	10.000	90.000	7 cijfers
N^3	1000	125.000	7 cijfers	8 cijfers	10 cijfers
2^N	1024	16 cijfers	31 cijfers	91 cijfers	302 cijfers
$N!$	7 cijfers	65 cijfers	161 cijfers	623 cijfers	onvoorstelbaar
N^N	11 cijfers	85 cijfers	201 cijfers	744 cijfers	onvoorstelbaar

Ter vergelijking:

het aantal protonen in het heelal is een getal met 79 cijfers
het aantal microseconden sinds de Big Bang heeft 24 cijfers

(1) $n(n-2) \in O(n^3)$; $n(n-2) \in O(n^2)$; $n(n-2) \in \Omega(n^2)$

(2) $n \in O(n^2)$, maar NIET $n \in \Theta(n^2)$

(3) $2^n \in O(3^n)$, maar NIET $2^n \in \Theta(3^n)$

(4) $(n^2+1)^{10} \in \Theta(n^{20})$

(5) $\sqrt{10n^2+7n+3} \in \Theta(n)$

(6) $2n \log_2(n+2)^2 + (n+2)^2 \log_2(n/2) \in \Theta(n^2 \log_2 n)$

(7) $2^{n+1} + 3^{n-1} \in \Theta(3^n)$

(8) $\lfloor \log_2 n \rfloor \in \Theta(\log_2 n)$; $\log_{10} n \in \Theta(\log_2 n)$

(9) $2^n \in O(n!)$, maar NIET $2^n \in \Theta(n!)$

De volgende naamgeving wordt meestal gehanteerd:

1	constant
$\log n$	logaritmisch
n	lineair
$n \log n$	n-log-n
n^2	kwadratisch
n^α $(\alpha > 1)$	polynomiaal
2^n	exponentieel
$n!$, n^n, ...	superexponentieel

Voorbeeld 3:

```
// invoer: array a[0···n − 1] bestaande uit n reals en
//         een reeel getal k
// uitvoer: index i waarvoor a[i] = k; −1 als deze niet
//          bestaat
```

$i := 0$ ⟶ basisoperatie
while ($i < n$ **and** $a[i] \neq k$) **do**
    $i := i + 1$; **od**
if ($i < n$)
    return i; **fi**
return -1;

best case/worst case/average case: $\cdots$

Recursief algoritme voor de berekening van $n!$:

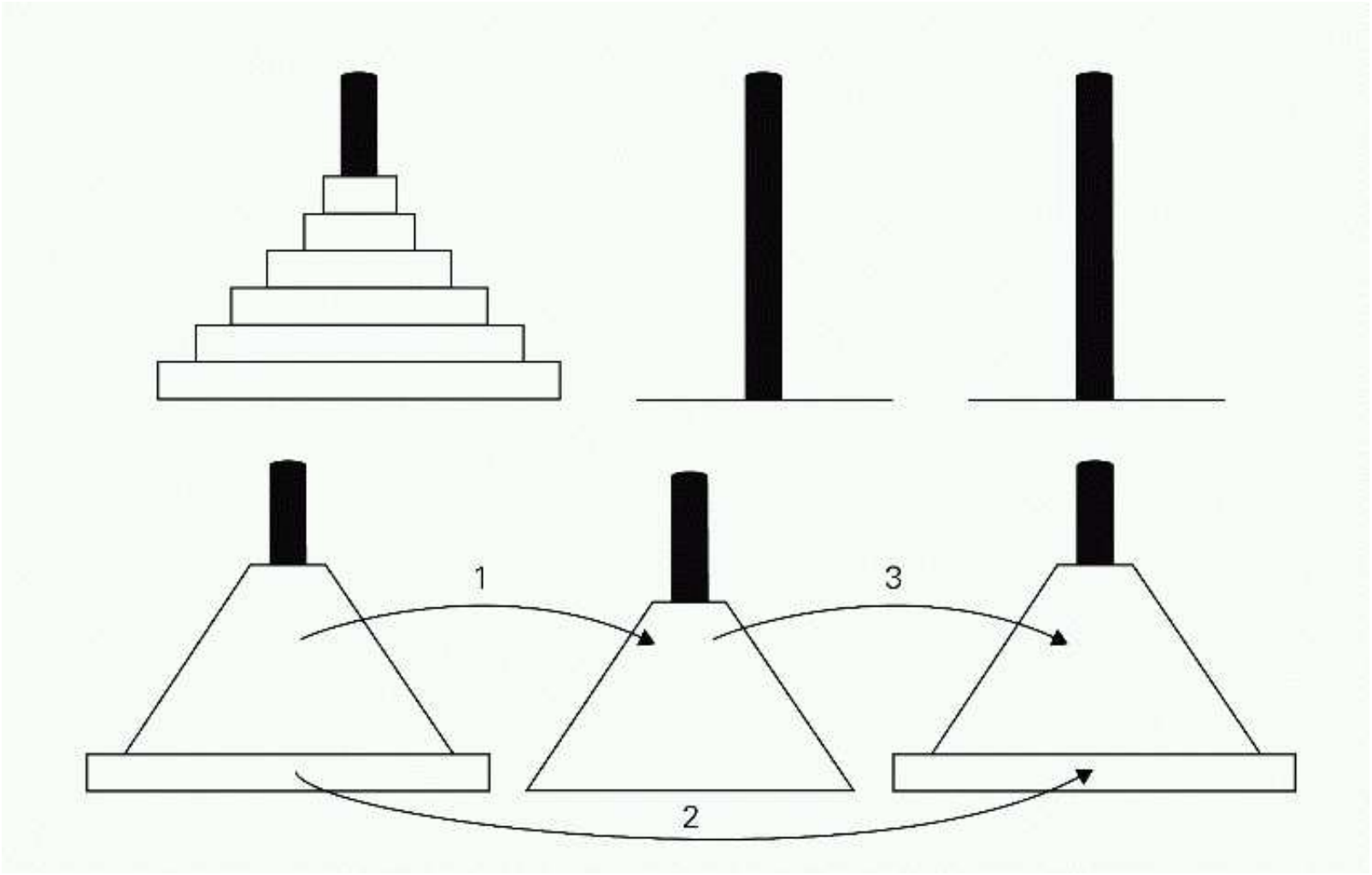
```
int faculteit ( int n ) { // gebruikt: n! = n · (n − 1)!
  if ( n == 0 )
     return 1;
  else          ↓ ←———————— basisoperatie
     return n*faculteit(n-1);
}  // faculteit
```

$M(n)$ = aantal vermenigvuldigingen (= aantal recursieve aanroepen - 1) voldoet aan de recurrente betrekking:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = M(n-1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing: $M(n) = n \longrightarrow$ complexiteit `faculteit` is $\Theta(n)$.

Oplossing Hanoi algemeen (*)



Recursieve oplossing van de Torens van Hanoi

Een recursief algoritme voor het probleem van de Torens van Hanoi (zie Programmeermethoden):

```
// zet toren van n stuks (optimaal) van a naar b via c
// print de zetten
void zet (int n, int a, int b, int c) {
  if ( n > 0 ) {
    zet (n-1, a, c, b);
    cout << "zet van " << a << "naar " << b << endl;
    zet (n-1, c, b, a);
  }  // if
}  // zet
```

- n (het aantal schijven) is een maat voor de grootte van de invoer
- het verzetten van een schijf is de basisoperatie

Laat $M(n) =$ aantal zetten, dan voldoet $M(n)$ aan de recurrente betrekking:

$$\begin{cases} M(0) = 0 \\ M(n) = 2M(n-1) + 1 \quad \text{voor } n > 0 \end{cases}$$

Oplossing (zie college):

$M(n) = 2^n - 1 \longrightarrow$ complexiteit `zet` is $\Theta(2^n)$.

Brute Force

Brute force: a straightforward approach, usually directly based on the problem statement and definitions.

Ofwel: los een probleem op via de meest voor de hand liggende (recht-toe-recht-aan) methode, meestal door eenvoudigweg de definitie van een oplossing te gebruiken. Vaak ook: alle mogelijkheden proberen.

Voorbeeld 1: vind de grootste gemene deler van twee getallen m en n door van alle mogelijke integers ≥ 2 (en $\leq \min(m, n)$) te proberen of ze zowel m als n delen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 2: los de DONALD + GERALD = ROBERT puzzel op door alle 9! (er was al gegeven dat D = 5) mogelijke antwoorden te proberen. (Zie college 1.)

Voorbeeld 3: zoek een gegeven X in een array van n stuks door er van links naar rechts doorheen te lopen en X met alle n te vergelijken.

Zoek herhaald de kleinste en zet die op de juiste positie in het array.

```
for i := 0 to n − 2 do
    min := i;
    for j := i + 1 to n − 1 do
        if A[j] < A[min] then
            min := j;
        fi
    od
    wissel(A[i], A[min]);
od
```

Aantal vergelijkingen: $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Probleem: bereken de waarde van het polynoom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in het punt $x = x_0$ (Levitin, opgave 3.1.4)

Brute force algoritme (uit de definitie):

```
p := 0;
for i := n downto 0 do
    macht := 1;
    for j := 1 to i do
        macht := macht * x; // bereken x^i
    od
    p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Efficiëntie (aantal $*/+$): $\Theta(n^2)$

Slimmer: we kunnen de efficiëntie eenvoudig flink verbeteren door van rechts naar links te evalueren en de x^i handiger te berekenen:

```
p := a[0];
macht := 1;
for i := 1 to n do
    macht := macht * x;
    p := p + a[i] * macht;
od
return p;
```

Efficiëntie: $\Theta(n)$;
Preciezer: $\#(*) = 2n$; $\#(+) = n$

Dit kan nog beter (methode van Horner), echter niet in orde van grootte.

Gegeven een patroon (= string van m karakters) en een tekst (= string van $n \geq m$ karakters). **Gevraagd** de index van de beginpositie in de tekst waar het patroon voorkomt.

Brute force algoritme: patroon v.l.n.r. langs de tekst schuiven en steeds de overeenkomstige karakters uit tekst en patroon vergelijken

```
for i := 0 to n − m do
    j := 0;
    while j < m and patroon[j] = tekst[i + j] do
        j := j + 1;
    od
    if j = m then
        return i;
    fi
od
return −1; // geen match gevonden
```

De werking van het algoritme geïllustreerd aan de hand van het volgende voorbeeld:

```
N  O  B  O  D  Y  -  N  O  T  I  C  E  D  -  H  I  M
N  O  T
   N  O  T
      N  O  T
         N  O  T
            N  O  T
               N  O  T
                  N  O  T
                     N  O  T
```

Het aantal vergelijkingen dat dit algoritme doet hangt af van de tekst en het patroon. In de worst case worden $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen gedaan. Dit komt voor wanneer in elke i-stap het patroon helemaal (dus m vergelijkingen) vergeleken wordt met de tekst. De complexiteit van het algoritme is dus $O(n * m)$.

Opgave: geef een tekst en een patroon waarvoor het algoritme $m * (n - m + 1)$ vergelijkingen doet.

Opmerking: het kan beter (Boyer-Moore, Knuth-Morris-Prattt), maar voor "gewone-taal" teksten is het algoritme zo slecht nog niet.

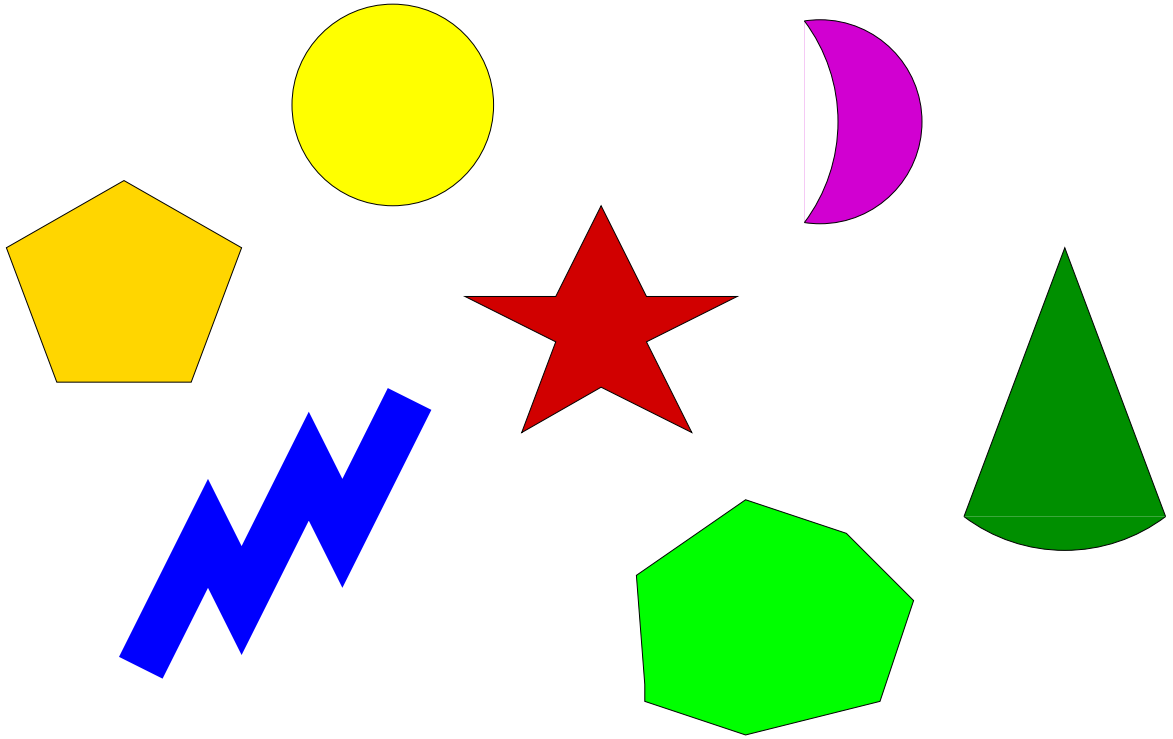
Gegeven n punten $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$.
Gevraagd het/een tweetal punten dat het dichtst bij elkaar ligt. Afstandsmaat: $\mathrm{d}(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Brute force algoritme: alle paren (p_i, p_j) (met $i < j$) aflopen en hun onderlinge afstanden $\mathrm{d}(p_i, p_j)$ vergelijken.

```
dmin := ∞;
for i := 1 to n − 1 do
    for j := i + 1 to n do
        d := (x_i − x_j)^2 + (y_i − y_j)^2;
        if d < dmin
            dmin := d; k := i; l := j;
        fi // (p_k, p_l) voorlopig closest pair
    od
od
```

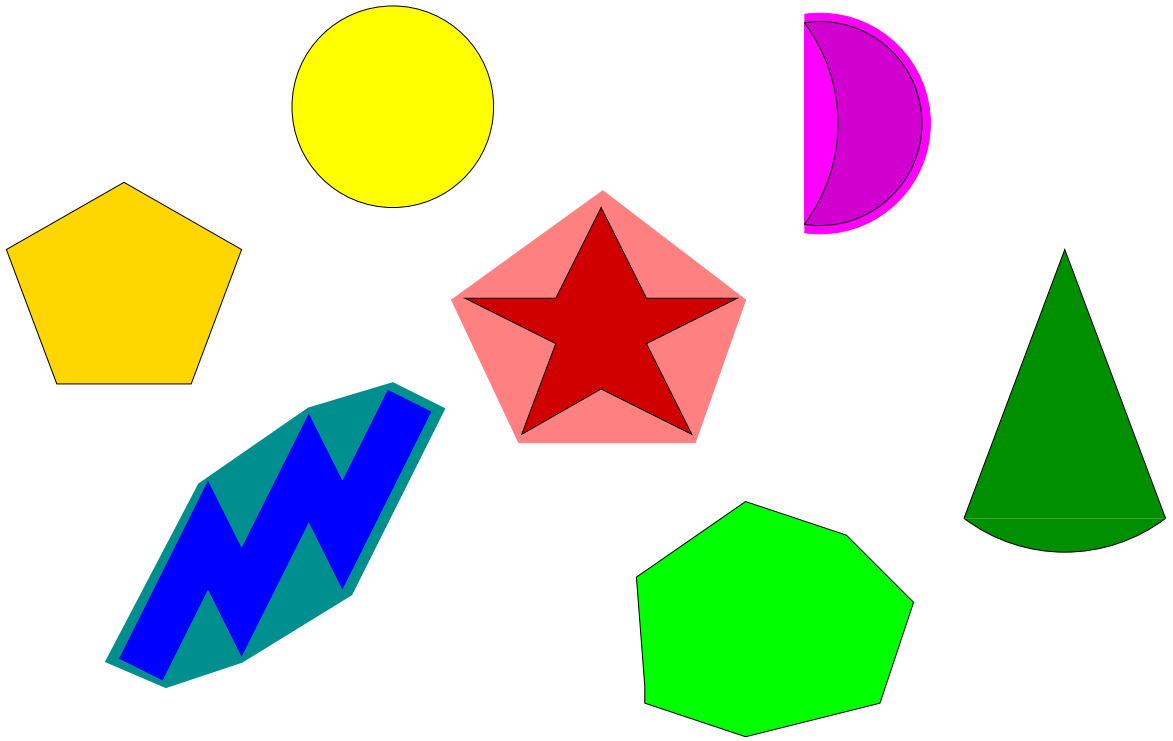
Complexiteit: $\frac{1}{2}n(n-1) = \Theta(n^2)$

Een verzameling punten in het platte vlak heet convex als voor elk tweetal punten uit die verzameling geldt dat het verbindend lijnstuk ook weer in die verzameling ligt.



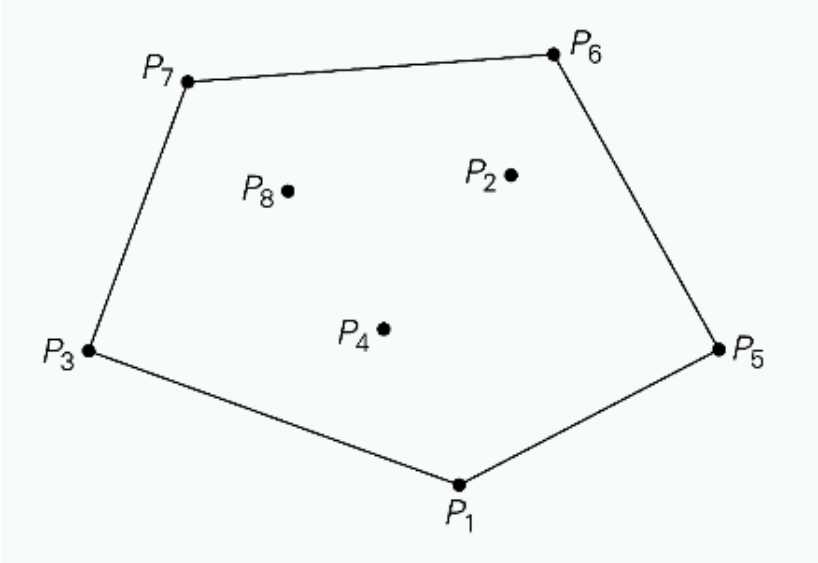
Convexe en niet-convexe vormen

De convex hull (convex omhulsel) van een verzameling S van punten in $\mathbf{R}^2$ is de kleinste convexe verzameling die S bevat.



Convexe omhulsels

Stelling: de convex hull van een verzameling S van $n > 2$ punten in $\mathbf{R}^2$ (niet alle op één lijn) is een convexe veelhoek (polygoon) met als hoekpunten enkele punten uit S.



De convex hull van de verzameling $\{P_1, P_2, \ldots, P_8\}$ is de convexe veelhoek met hoekpunten P_1, P_5, P_6, P_7 en P_3

We baseren ons brute force algoritme op de volgende observatie: een lijnstuk P_iP_j maakt deel uit van de rand van de convex hull van $\{P_1, P_2, \ldots, P_8\}$ d.e.s.d.a. alle andere punten van de verzameling aan een en dezelfde kant van de lijn door P_i en P_j liggen.

Brute force: Ga *voor elk tweetal* punten $P_i = (x_i, y_i)$ en $P_j = (x_j, y_j)$ na of *alle andere punten* aan dezelfde kant van de lijn $(y_j - y_i)x + (x_i - x_j)y = x_iy_j - y_ix_j$ liggen. Zo ja, dan is P_iP_j dus deel van de convex hull.

Complexiteit: $O(n^3)$

Opmerking: het kan veel beter, namelijk $O(n \lg n)$

Brute force:

- **Voordelen**:
  - algemeen toepasbaar
  - eenvoudig
  - levert voor een aantal belangrijke problemen (zoeken, patroonherkenning) een zeer behoorlijk algoritme op
- **Nadelen**:
  - levert meestal geen efficiënt algoritme op
  - soms onacceptabel langzaam

- **Lezen/leren bij dit college:**
  Paragraaf 2.1–3, 3 inl., 3.1–3

- **Werkcollege** programmeeropdracht 1:
  vanmiddag, 13:45–15:30,
  in computerzalen

- **Volgend college:**
  2/3 maart 2017

- Het onderwerp Complexiteit en recursie (Levitin 2.4 en sheets 14–17) slaan we over. Hier komen we in het tweede jaar Informatica nog op terug.