Twaalfde college algoritmiek

12 mei 2016

Branch & Bound

Branch & bound

- is alleen toepasbaar op optimalisatieproblemen
- genereert oplossingen stap voor stap en houdt de tot dusver gevonden beste oplossing bij
- gebruikt voor elke deeloplossing (= knoop in de state space tree) een of andere ondergrens (minimalisatieprobleem) resp. bovengrens (maximalisatieprobleem) op de te verwachten waarde van de object-functie, met als doel
  - van deeloplossingen te kunnen bepalen dat ze niet verder bekeken hoeven te worden: snoeien (*)
  - de zoekvolgorde in de zoekruimte (state space tree), dus de volgorde waarin knopen worden gegenereerd en verder bekeken, te leiden (**)

(*) zou bij backtracking ook kunnen, maar (**) niet of nauwelijks

Een branch and bound algoritme breidt een knoop (deeloplossing) niet verder uit als

- de waarde van de ondergrens (bovengrens) bij die knoop niet beter is dan de waarde van de tot dusver gevonden beste oplossing: als ondergrens $\geq$ tot dusver gevonden minimale waarde, dan snoeien

- de deeloplossing niet meer voldoet aan de restricties (of niet meer uit te breiden is tot een toelaatbare oplossing)

- er nog maar één volledige, toelaatbare oplossing mogelijk is bij de deeloplossing (i.h.b. als deeloplossing zo'n volledige oplossing *is*); de waarde van deze ene oplossing wordt met beste oplossing tot nu toe vergeleken; update zonodig beste oplossing.

De volgorde waarin de knopen (deeloplossingen) worden uitgebreid hangt direct af van de berekende grenzen:

- er worden meerdere deeloplossingen tegelijk bijgehouden, dit in tegenstelling tot backtracking
- in elke stap wordt een van al deze deeloplossingen gekozen, en daarvan worden alle 1-staps-uitbreidingen (kinderen in de state space tree) bekeken en geëvalueerd (d.w.z. ondergrens/bovengrens bepaald)
- zinloze uitbreidingen worden meteen verworpen
- meestal wordt de deeloplossing gekozen die het meest veelbelovend lijkt: best-fit-first branch-and-bound
- bij minimalisatieproblemen (resp. maximalisatieproblemen) kiezen we de knoop met de laagste ondergrens (resp. hoogste bovengrens) als eerste

Los het toewijzingsprobleem op voor onderstaand voorbeeld met behulp van

1. backtracking (snoeien op de kosten van deeloplossingen (*))
2. branch and bound

en vergelijk de hoeveelheid snoeiwerk bij beide methoden, alsmede de volgorde waarin de knopen van de state space tree worden bekeken.

	W	X	Y	Z
Alice	4	7	3	5
Bob	6	2	9	1
Carol	3	9	5	3
David	1	1	1	8

(*) overigens kun je bij backtracking ook ondergrenzen berekenen zoals bij B&B, en die gebruiken om te snoeien; B&B vindt een optimale oplossing echter i.h.a. eerder

Gegeven n objecten, met gewicht $w_1, \ldots, w_n$ en waarde $v_1, \ldots, v_n$, en een knapzak met capaciteit W.
Gevraagd: de meest waardevolle deelverzameling der objecten die in de knapzak past (dus met totaalgewicht $\leq W$).

Voorbeeld:

item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

Maximaal gewicht $W = 10$

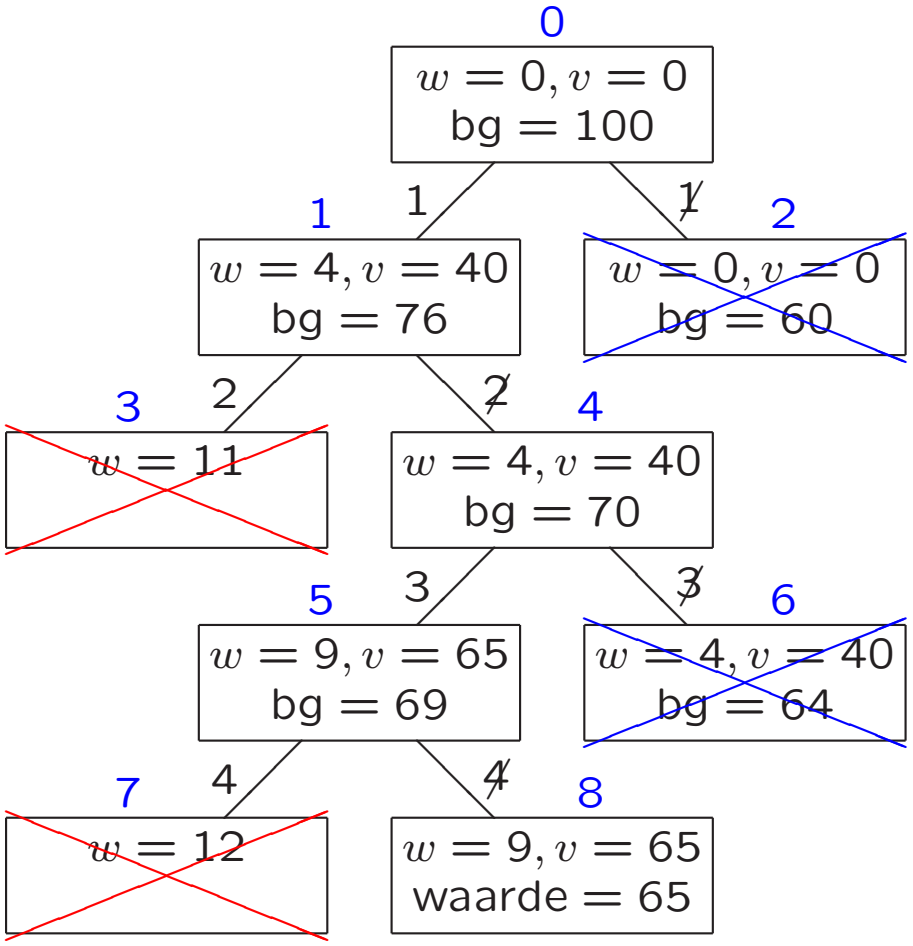
item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

Opbouwen van de oplossing: in de i-de stap wordt object i wel of niet gekozen,

Een bovengrens voor de waarde van een optimale oplossing:

- Bij aanvang: $W * (v_1/w_1) = 100$;
- Na de i-de stap: $v + (W - w) * (v_{i+1}/w_{i+1})$, met v de totaalwaarde van de reeds gekozen objecten en w het totaalgewicht daarvan.

De optimale oplossing heeft gewicht 9 en waarde 65: $\{1, 3\}$.



item	w	v	v/w
1	4	40	10
2	7	42	6
3	5	25	5
4	3	12	4

$W = 10$

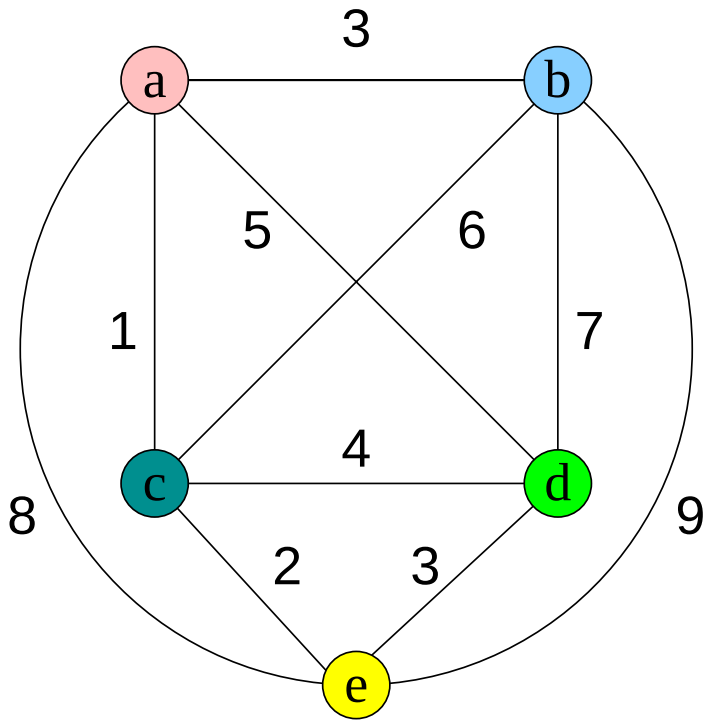
Zie ook exercise 12.2.5, Levitin.

Traveling Salesman Problem (handelsreizigersprobleem)

Gegeven n steden waarvan alle onderlinge afstanden bekend zijn.

Gevraagd: de/een kortste route die elke stad precies één keer aandoet, en weer terugkeert in het vertrekpunt.

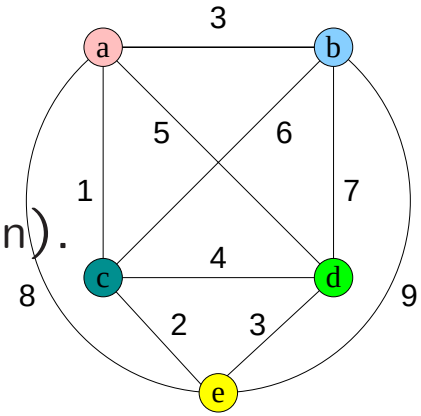
Ofwel: vind de/een kortste Hamiltonkring in een samenhangende gewogen (complete) graaf. Het gaat hier om een ongerichte graaf.



De optimale oplossing heeft lengte 16: a, b, d, e, c, a

Mogelijke ondergrenzen voor de kosten van een optimale oplossing. . .

Mogelijke ondergrenzen voor de kosten van een optimale oplossing:

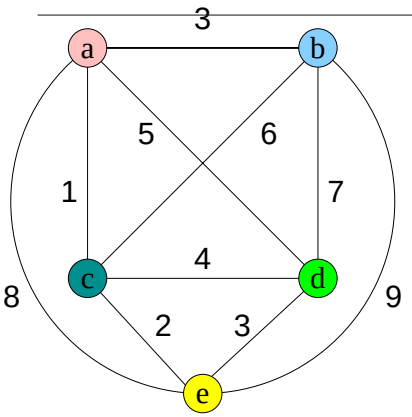


- eenvoudig: $n\times$ kortste afstand tussen twee knopen;
  $5 \times 1 = 5$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).

- iets beter: de lengtes van de n kortste takken gesommeerd;
  $1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13$ bij aanvang (analoog als reeds takken gekozen zijn).

- nog beter: som over alle knopen i van de afstanden van knoop i tot de twee dichtstbijzijnde knopen (inclusief al gekozen takken), en dat gedeeld door 2(*);
  $((1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3))/2 = 14$ bij aanvang.
  Opmerking: delen door 2 is niet nodig; je kunt ook 2×lengte minimaliseren (*).

Branch & Bound, state space tree



0
a
og = 4+9+3
+7+5 = 28

1
a,b
og = 4+9+3
+7+5 = 28

2
a,c

3
a,d
og = 6+9+3
+8+5 = 31

4
a,e
og = 9+9+3
+7+10 = 38

5
a,b,c
og = 4+9+7
+7+5 = 32

6
a,b,d
og = 4+10+3
+10+5 = 32

7
a,b,e
og = 4+12+3
+7+11 = 37

8
a,d,b
og = 6+10+3
+12+5 = 36

9
a,d,c

10
a,d,e
og = 6+9+3
+8+5 = 31

13
a,b,c,d
(e,a)
2L = 11+9+10
+7+11 = 48

14
a,b,c,e
(d,a)
2L = 8+9+8
+8+5 = 38

15
a,b,d,c
(e,a)
2L = 11+10+6
+11+10 = 48

16
a,b,d,e
(c,a)
2L = 4+10+3
+10+5 = 32

11
a,d,e,b
(c,a)
2L = 6+15+7
+8+12 = 48

12
a,d,e,c

De volgende versnellingen zijn mogelijk:

- bekijk alleen Hamiltonkringen startend in a
  immers, de kring c, d, e, a, b, c is hetzelfde als de kring a, b, c, d, e, a (en als d, e, a, b, c, d en e, a, b, c, d, e en als b, c, d, e, a, b).

- bekijk alleen situaties waarbij b wordt bezocht voor c
  de kring a, c, d, b, e, a is dezelfde kring als a, e, b, d, c, a maar in omgekerde volgorde. Beide hebben dezelfde lengte (want deze graaf is ongericht).

Zie vorige sheet: deeloplossingen beginnend met a, c zijn *ontoelaatbaar* (infeasible) na uitbreiding komt c voor b.
Deze knoop hoeft dus ook niet verder bekeken te worden; bijbehorende oplossingen komen we elders wel tegen. Bijv.: a, c, e, b, d, a vinden we terug als a, d, b, e, c, a, dus via knoop a, d.

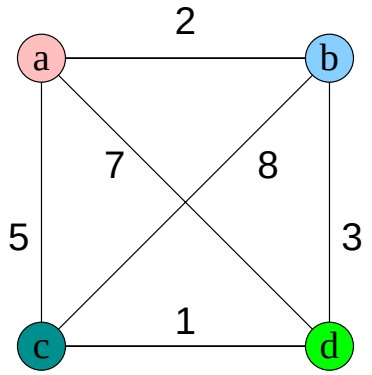
We zeiden wel:

delen door 2 is niet nodig; je kunt ook 2×lengte minimaliseren (*)

Delen door 2 geeft echter wel scherpere ondergrens, als je resultaat afrondt naar boven.

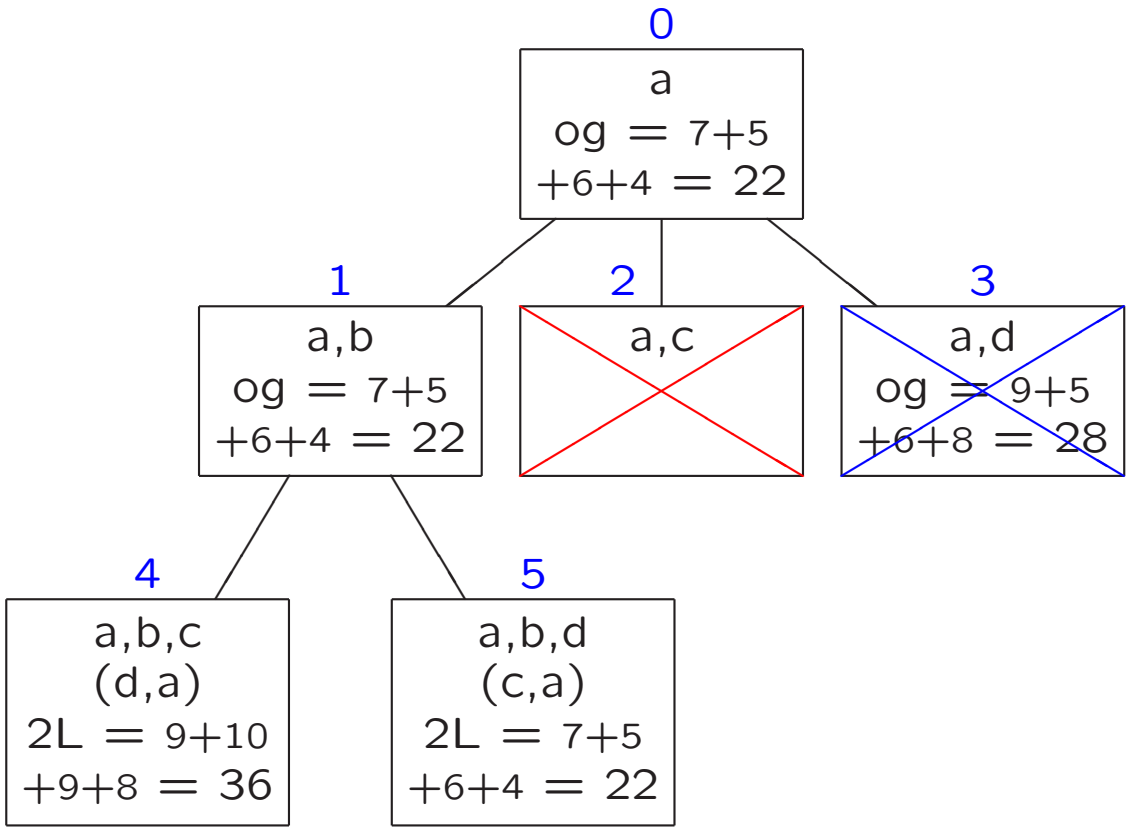
In vorige voorbeeld wordt ondergrens 31 van knoop a,d hiermee 16. Deze knoop hoef je nu niet uit te werken (zie boom in boek).

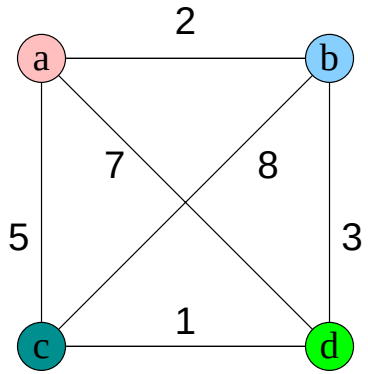
Nog een voorbeeld, met als ondergrens wederom de som van de twee kortste takken per knoop (eventueel gedeeld door 2, zoals in het boek).



De optimale oplossing heeft lengte 11: a, b, d, c, a.

Exercise 12.2.9, vervolg





Overeenkomsten en verschillen tussen:

- Exhaustive search (ES)
- Backtracking (Bt)
- Best fit first branch and bound (B&B)

N.B.: Verschillende punten hieronder hangen soms met elkaar samen.

- **ES** geschikt voor optimalisatieproblemen en andere problemen
  Bt geschikt voor optimalisatieproblemen en andere problemen
  B&B alleen geschikt voor optimalisatieproblemen

- **ES** kán oplossing component voor component opbouwen, maar is ook geschikt voor problemen waar geen sprake is van componenten en deeloplossingen

  Bt bouwt oplossing component voor component op

  B&B bouwt oplossing component voor component op

- **ES** controleert pas op geldigheid als het complete oplossing heeft opgebouwd (in geval dat ES oplossing component voor component opbouwt, ook verderop)

  Bt breidt deeloplossing niet verder uit als het geen geldige complete oplossing meer kan worden

  B&B breidt deeloplossing niet verder uit als het geen geldige complete oplossing meer kan worden

- **ES** let niet op ondergrens/bovengrens voor waarde complete oplossing

  Bt kán besluiten om deeloplossing niet verder uit te breiden als ondergrens/bovengrens voor waarde complete oplossing niet beter is dan beste waarde van tot nu toe gevonden complete oplossing, maar dit hoeft niet

  B&B breidt deeloplossing niet verder uit als ondergrens/bovengrens voor waarde complete oplossing niet beter is dan beste waarde van tot nu toe gevonden complete oplossing

- **ES** houdt op elk moment slechts één deeloplossing bij (en impliciet de daaraan voorafgaande deeloplossingen in de toestandsboom)

  Bt houdt op elk moment slechts één deeloplossing bij (en impliciet de daaraan voorafgaande deeloplossingen in de toestandsboom)

  B&B houdt verzameling van deeloplossingen bij die (mogelijk) nog uitgebreid worden tot complete oplossing

- **ES** genereert bij uitbreiden van deeloplossing één kind tegelijk
  Bt genereert bij uitbreiden van deeloplossing in principe één kind tegelijk
  B&B genereert bij uitbreiden van deeloplossing meteen alle kinderen

- **Bt** kán ondergrens/bovengrens gebruiken om deeloplossingen te selecteren die als eerstvolgende worden uitgebreid, maar alleen om te kiezen tussen de kinderen van de huidige deeloplossing, en bovendien is dit niet standaard
  B&B gebruikt ondergrens/bovengrens om deeloplossing te selecteren die als eerstvolgende wordt uitgebreid

- **ES** volgt (in de praktijk) depth-first wandeling in toestandsboom bij zoeken naar (optimale) oplossing
  Bt volgt depth-first wandeling in toestandsboom bij zoeken naar (optimale) oplossing
  B&B kan heen en weer springen in toestandsboom bij zoeken naar optimale oplossing

- **Lezen/leren bij dit college:**
  paragraaf 12.2

- **Werkcollege:**
  donderdag 12 mei 2016, 13:45–15:30, in zaal Benoordenhout

- **Opgaven:**
  zie `http://www.liacs.leidenuniv.nl/~vlietrvan1/algoritmiek`

- **Na werkcollege:** assistentie opdracht 3

- **Volgend college:**
  donderdag 19 mei 2016