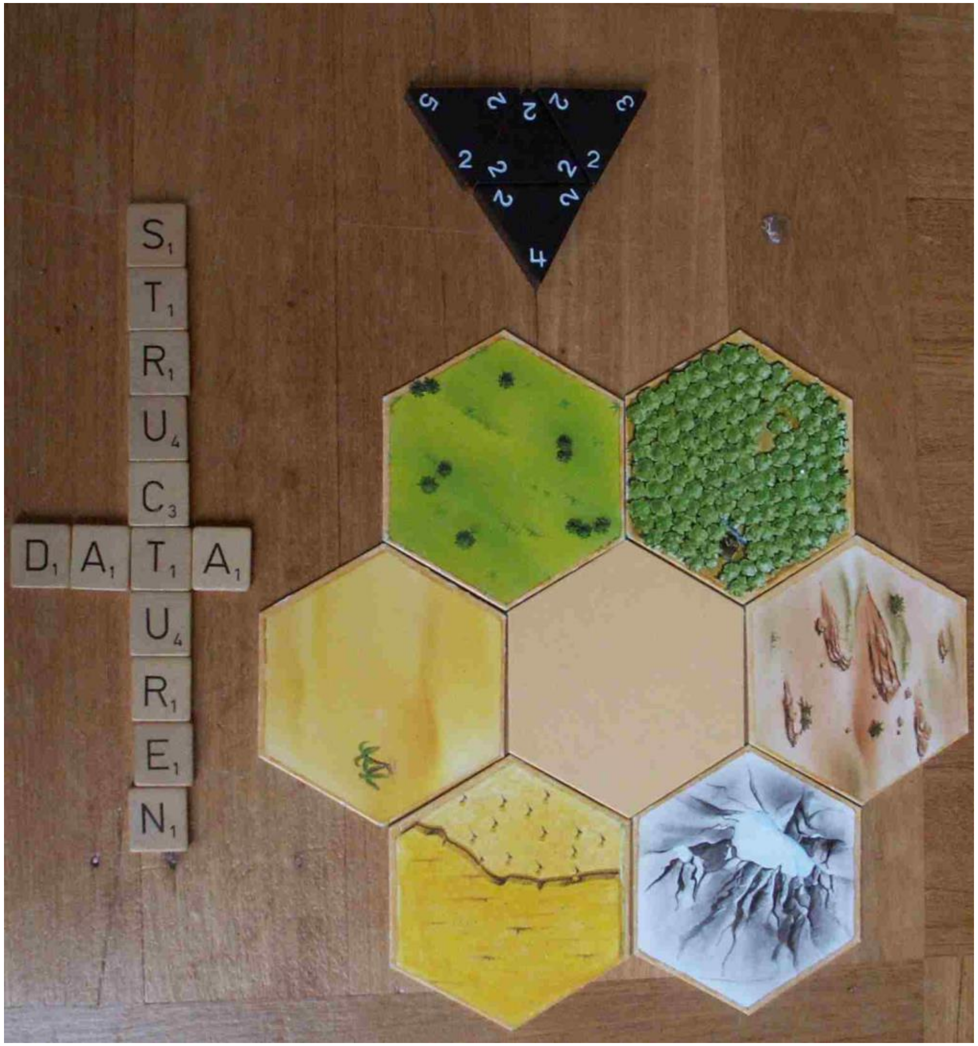
REGELMATIGE OPDELINGEN VAN DE RUIMTE IN PLAT VLAK EN BOLOPPERVLAK

DATASTRUCTUREN



1

Dr. D.P. Huijsmans
College 10   6 november 2013
Universiteit Leiden LIACS

Datastructuren voor bordspelen en aardoppervlak

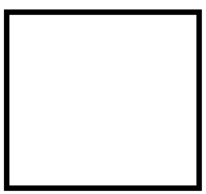
- Bordspelen:
- Dam, schaak, scrabble, domino, etc.
- Triominos
- Catan

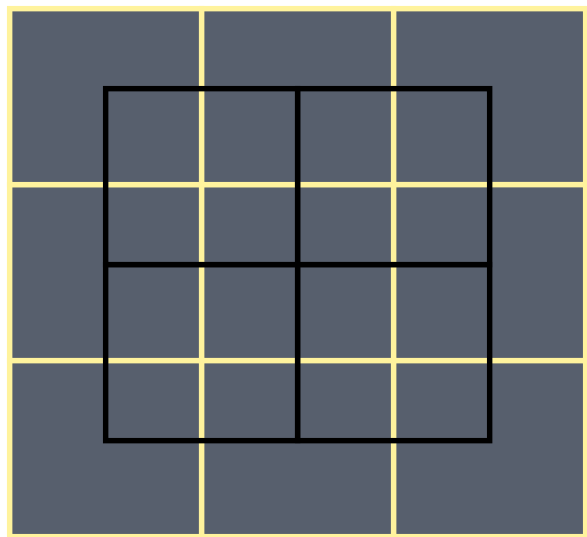
- Aardoppervlak (gekromd 2D, periodiek)

- Nodig:
- Snel toegang tot lokale samenhang:
- **Naaste buren** moeten direct gevonden kunnen worden vanuit willekeurig startpunt
- Datastructuren: **gridstructuren**

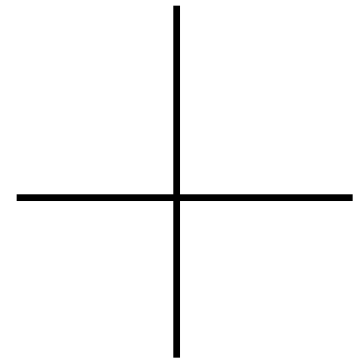
Grid opbouw met een vierkant

Bordspelen zoals: dam, schaak, scrabble, etc

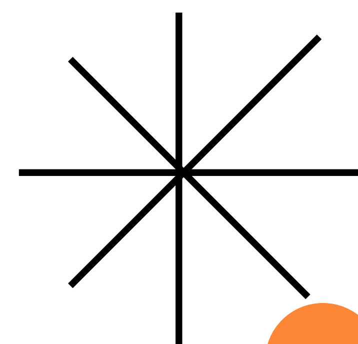




Grid cel is ook een vierkant



Connectiviteit= 4

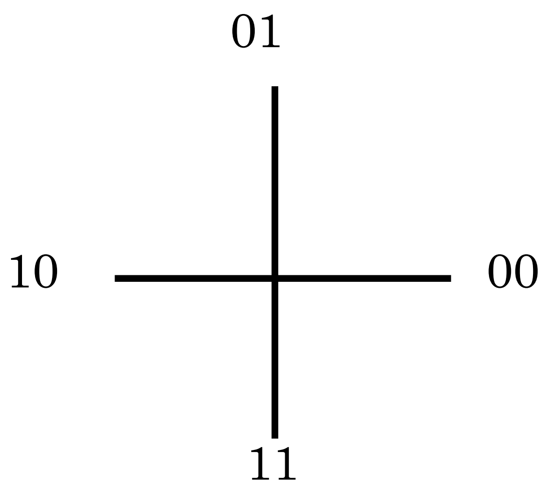


Connectiviteit= 8?

Impliciete zwaartepunt positie:zelfde
voor elke rij/kolom: gridafstand * (i,j)

Naaste buren vierkant grid?

Connectiviteit= 4

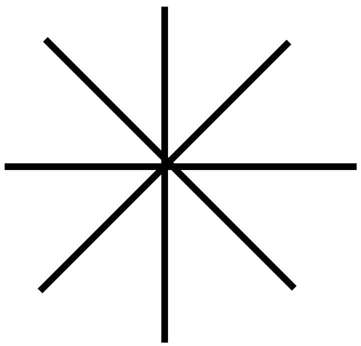


Crack-code (incrementeel):

4 richtingen

2 bit/contour punt

Connectiviteit= 8



Chain-code (incrementeel):

8 richtingen

3 bit/contour punt

Speelbord en bipartiete graaf representatie

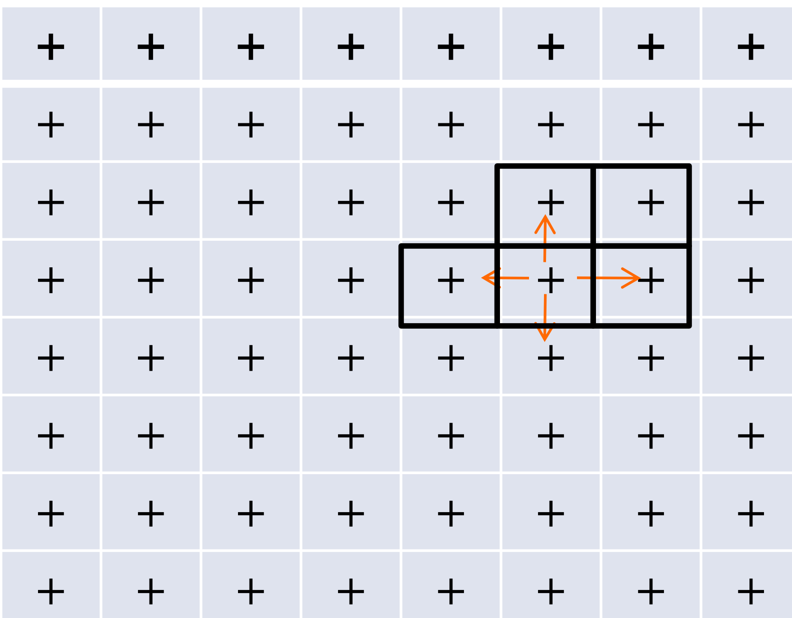
Een speelbord kan qua vakken ingedeeld worden in rijen en kolommen (b.v. daar waar zwaartepunten vertikaal dan wel horizontaal op een lijn liggen)

De positie vertikaal,horizontaal kan dan worden aangegeven met een integer index i,j

We zijn geinteresseerd in alle **kruispunten** van indexen i,j dat wil zeggen in de **volledige bipartiete graaf van i en j**

In deze volledige bipartiete graaf wordt voor elk kruispunt[i,j] informatie opgeslagen over de tegel/speelvak ter plaatse b.v.: bezet Y/N, ID van tegel, zichtbaar/niet, kleur damstuk Z/W, orientatie triomino, hoekcijfers ijk triomino etc.

Triviale afbeelding vierkante tegels op vierkant grid



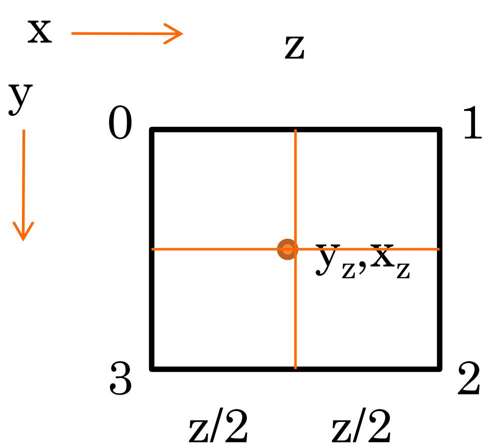
Dx=Dy=1
Naaste buur afstand=1
Oppervlak tegel=1
Zijde tegel=1

Op het kruispunt van rij en kolom kan unieke ID van de tegel opgeslagen worden
Voor elke tegel kan in een ID array rij en kolom nr van het speelveld (grid/adjacency matrix) worden opgeslagen

Fysieke locatie tegel[i,j] in vierkant grid

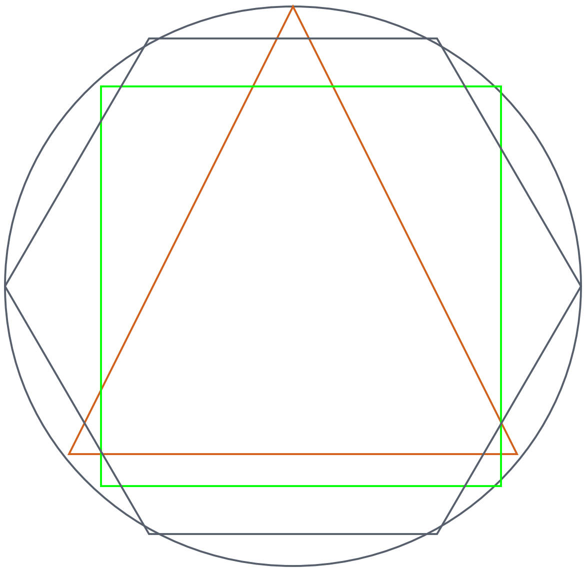
Met vierkante tegel zijde z en rij en kolom indexen i,j:
i,j ε [0..max] oorsprong linksboven; vertikaal y, horizontaal x

Zwaartepunt tegel[0,0] $y_z=z/2$; $x_z=z/2$
Zwaartepunt tegel[i,j]: $y_z= z/2 + iz$; $x_z = z/2+jz$



Als zwaartepunt vierkante tegel met zijde z is y_z,x_z dan zijn de coordinaten van:
Hoekpunt0 = $y_z - z/2, x_z - z/2$
Hoekpunt1 = $y_z - z/2, x_z + z/2$
Hoekpunt2 = $y_z + z/2, x_z + z/2$
Hoekpunt3 = $y_z + z/2, x_z - z/2$

BORDSPELEN ZIJN VAAK GEBASEERD OP GELIJKZIJDIGE VEELHOEKEN



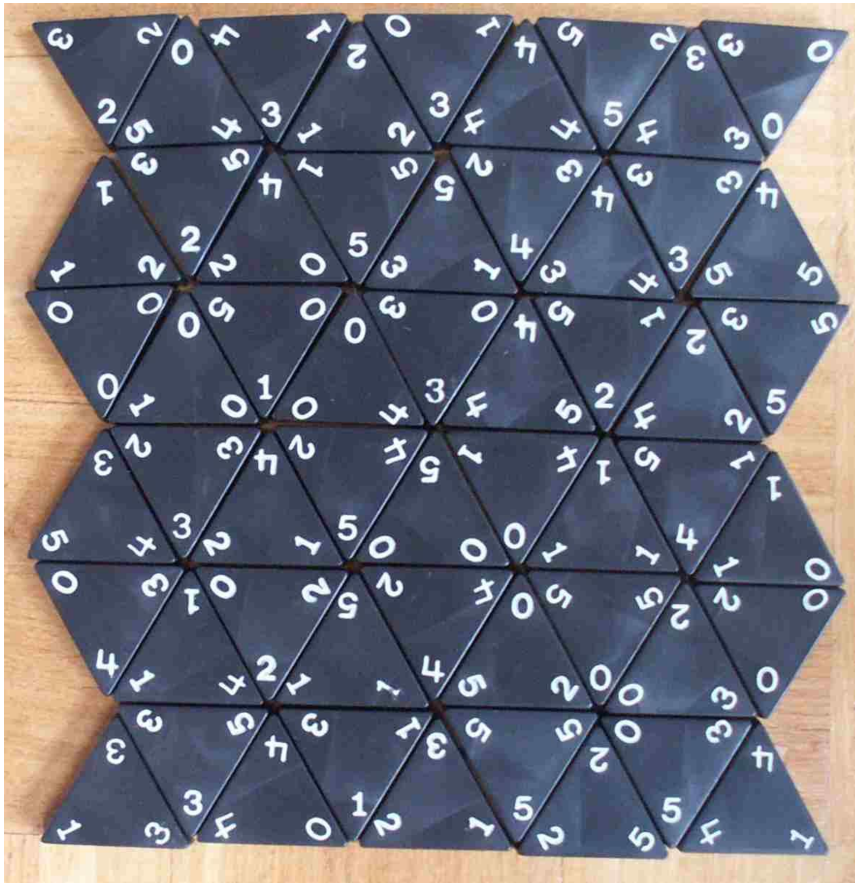
Gelijkzijdige veelhoeken die geschikt zijn om 2D op te vullen (**space fillers**):

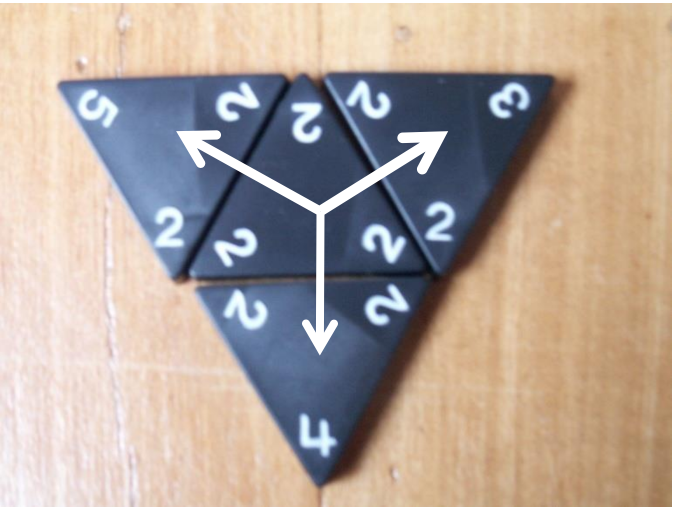
Gelijkzijdige driehoek, vierkant, hexagon (gelijkzijdige zeshoek)

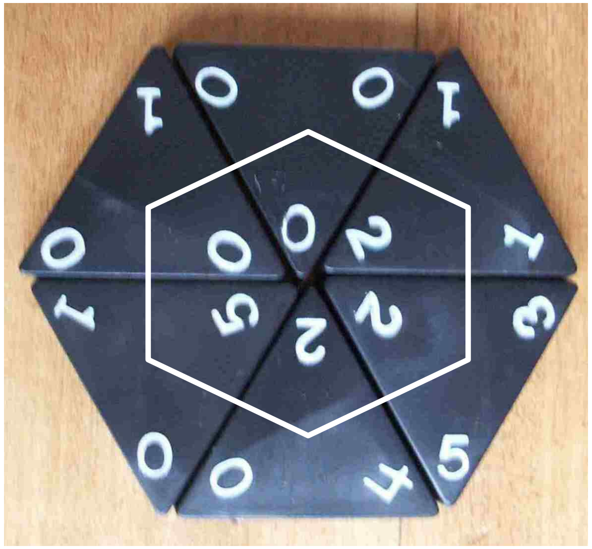
Elk van deze ruimtevullers heeft een eigen lokale verbindingsstructuur

Connectiviteit: = het aantal naaste buren

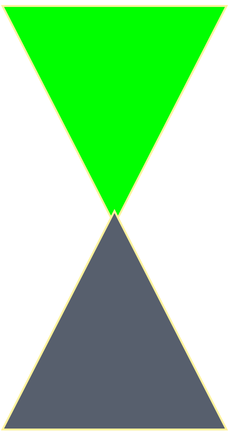
Triomino grid en naaste buren (5e prog.opdracht over Triomino's)

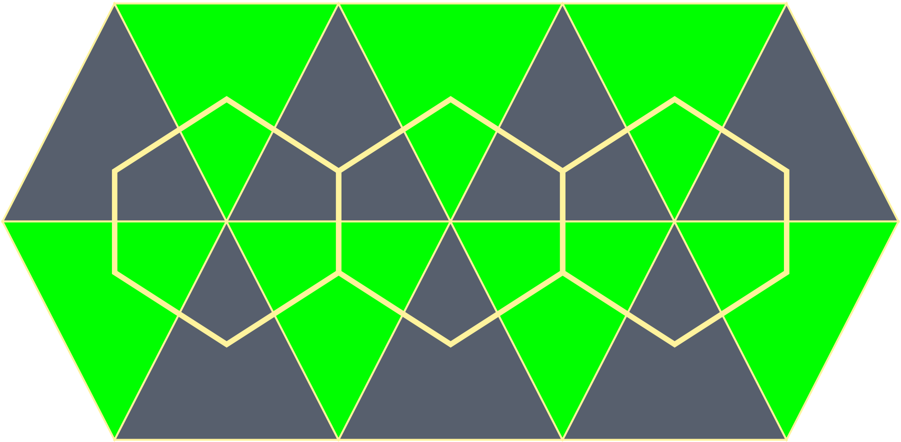


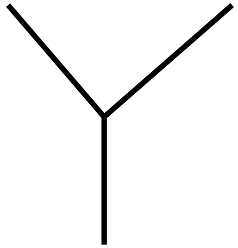




GRID OPBOUW MET EEN GELIJKZIJDIGE DRIEHOEK







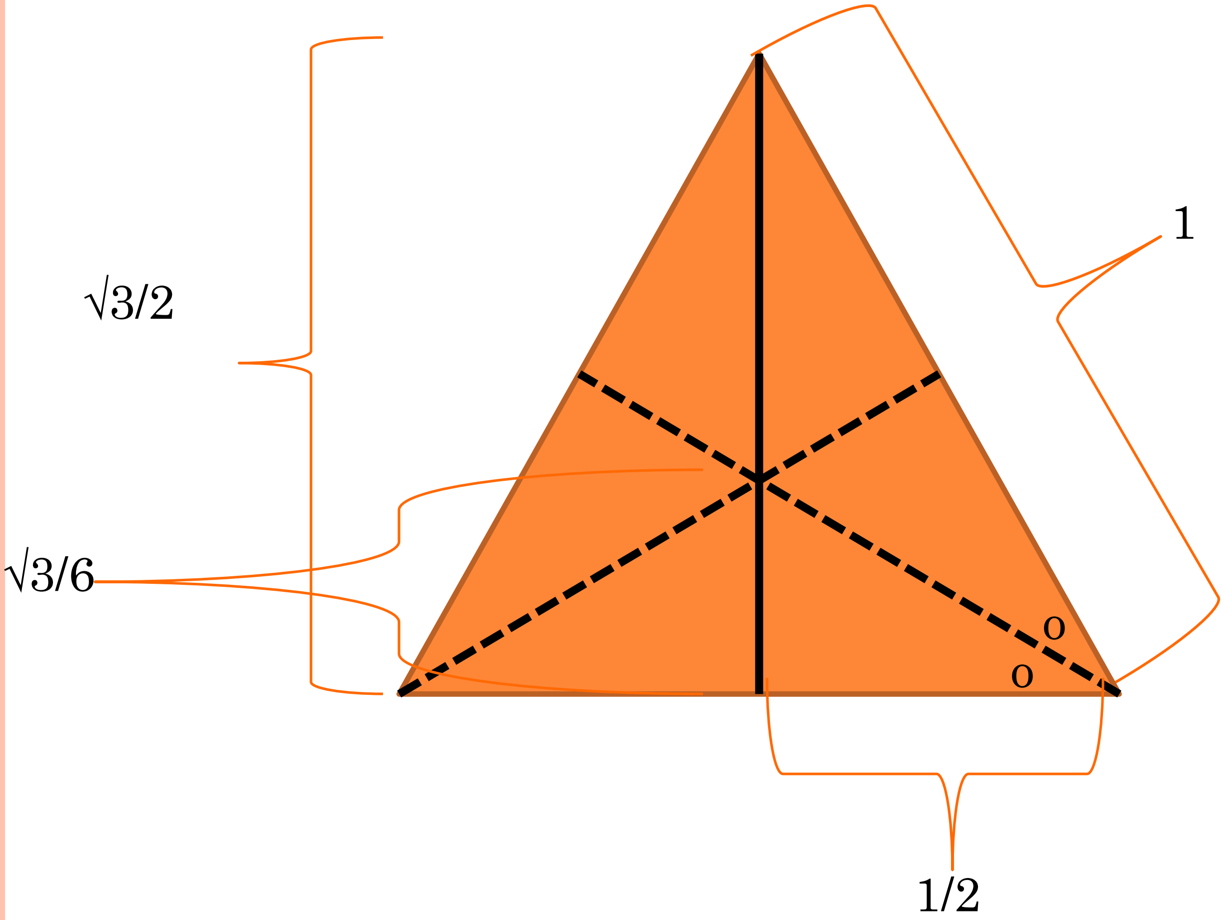
Connectiviteit= 3

Grid cel is hexagon

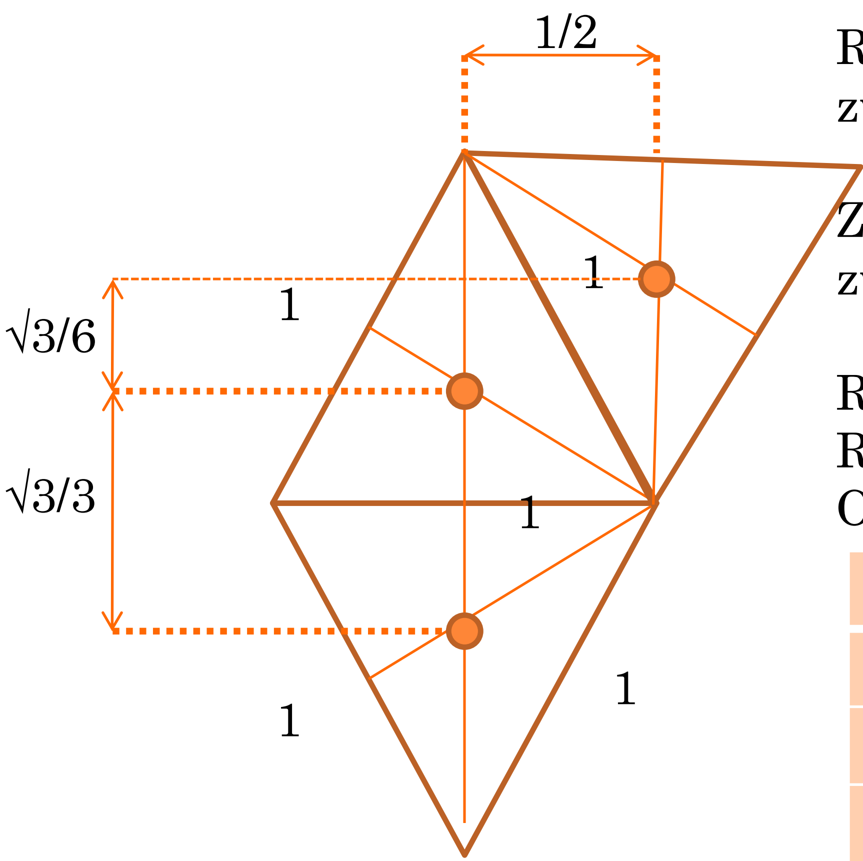
Posities middelpunten gelijkzijdige driehoeken:

Om de 2 regels een halve grid afstand verspringend

Gelijkzijdige driehoeken en zwaartepunt posities



Verband zijde driehoek en roosterafstand



Roosterafstand = afstand tussen zwaartepunten buurdriehoeken

Zwaartepunt = snijpunt zwaartelijnen op 1/3 van basis

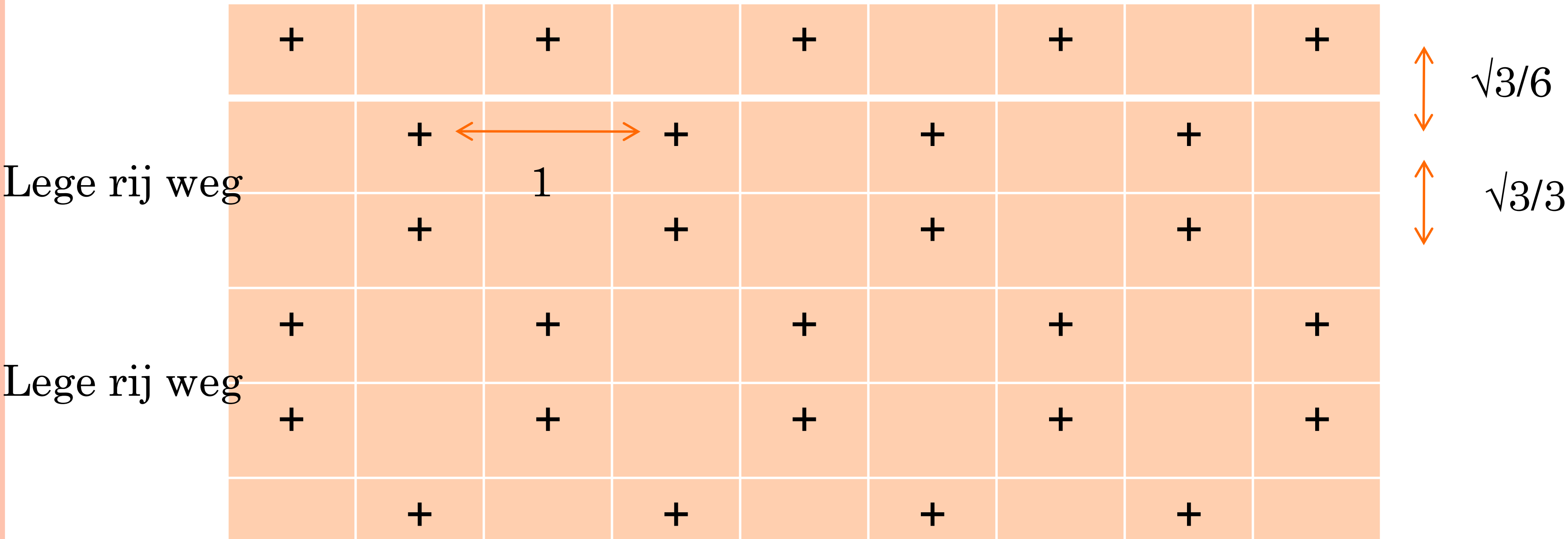
Roosterafstand Dy = $\sqrt{3}/6$ (zijde=1)
Roosterafstand Dx = 1/2
Oppervlak =$\sqrt{3}$ /2

	+		+		+
+		+		+	
+		+		+	
	+		+		+
	+		+		+

Dx=1/2
Dy=$\sqrt{3}/6$

Door zwaartepunten Δ betegeling kan een rechthoekig Dy,Dx grid gelegd worden

Middelpunten grid structuur Δ

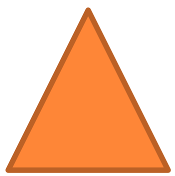


3 NAASTE BUREN IN 8-VERBONDEN INGEDIKT RECHTHOEKIG GRID

+		+		+		+		+
	12		+		+		+	
	25		+		45		52	
34		55		+		13		+
+		+		+		3		+
	+		+		+		+	

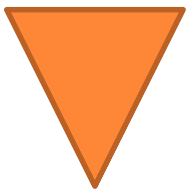
Als we de indexen van de individuele triominos op de plus posities opslaan van het half-gevulde 4 vierkantsgrid, dan heeft elke 8-verbonden omgeving van een bezette positie precies 3 gevulde naaste buren, die de 3-verbonden buren van het driehoeksgrid vertegenwoordigen

Bezetting 8-verbonden buurposities



+		+
	+	
	+	

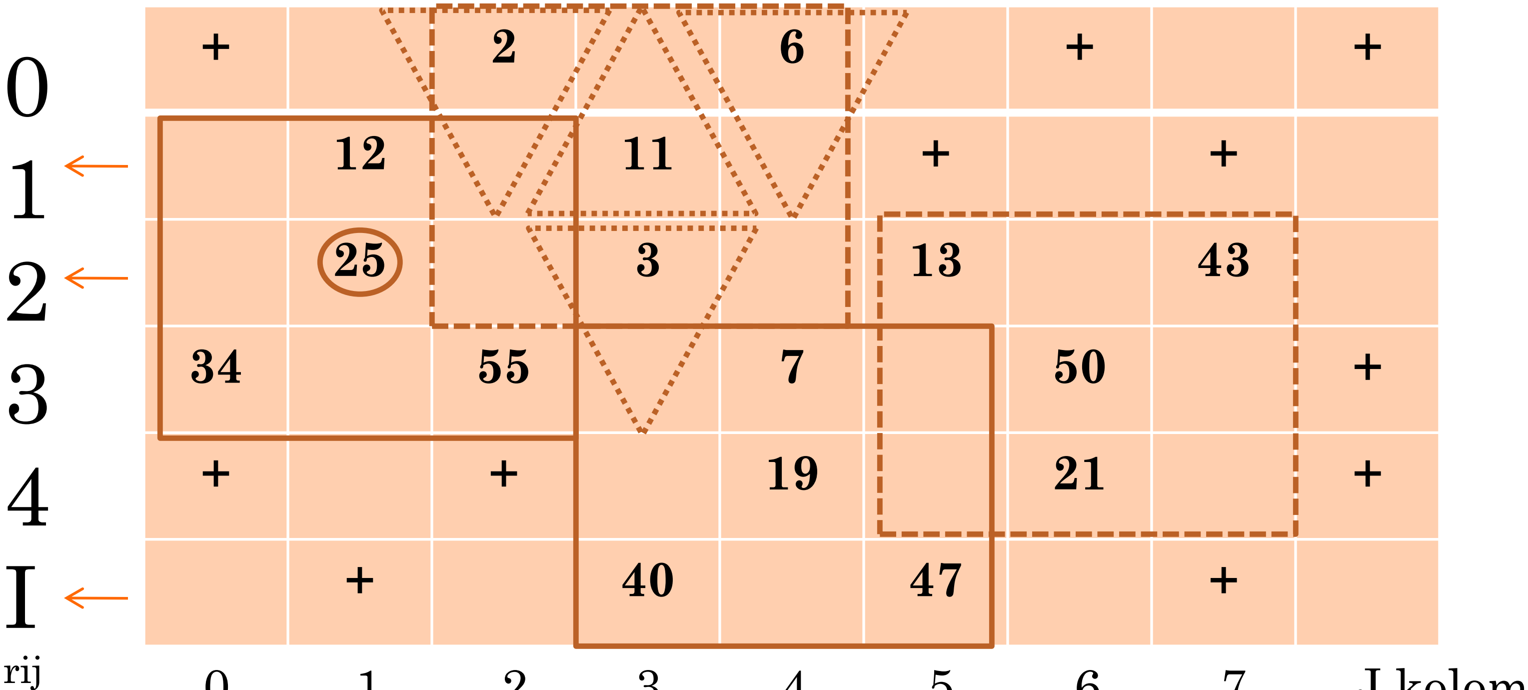
	+	
	+	
+		+

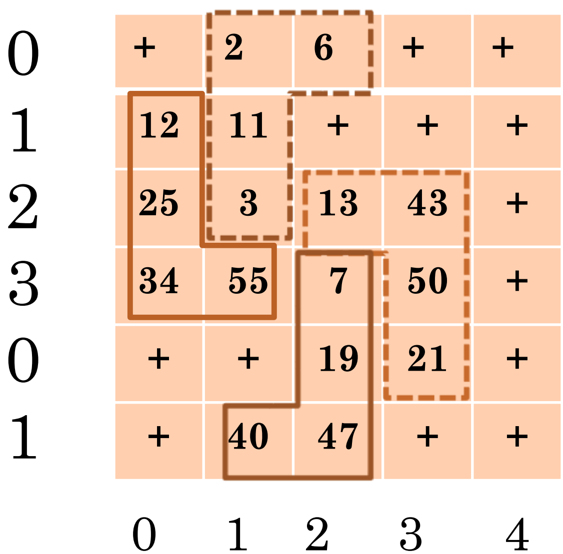


+	+	+
+	+	+

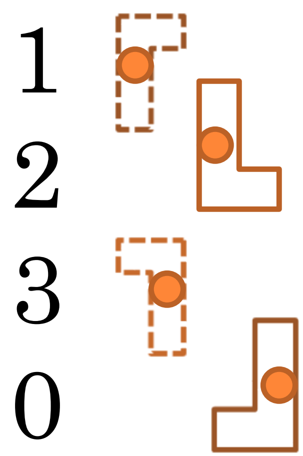
Alleen deze 6 buurposities hoeven maar doorzocht te worden

Buurconfiguraties na complete aanschuiving naar links





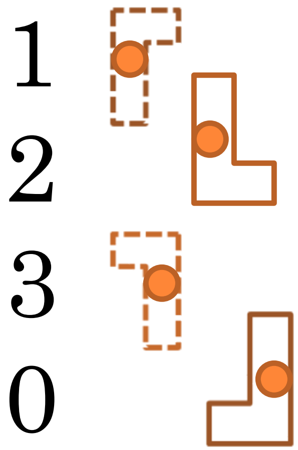
Aftastvolgorde naaste 3 buren:
Als rij i modulo 4 =



Na verwijdering alle niet bezette gridposities en aanschuiven naar links

L-TEMPLATE VOOR AFTASTEN NAASTE BUREN Δ-BETEGELING OP VIERKANT GRID

Aftastvolgorde naaste 3 buren:
Als rij i modulo 4 =



Naaste buren configuratie1:
i-1,j
i-1,j+1
i+1,j

Naaste buren configuratie2:
i-1,j
i+1,j
i+1,j+1

Naaste buren configuratie3:
i-1,j
i-1,j-1
i+1,j

Naaste buren configuratie0:
i-1,j
i+1,j
i+1,j-1

Fysieke locatie tegel[i,j] in Δ-grid

Rij 0 start met tegel op top;
rij 1 naar rechts verschoven met tegel op basis
Maat zijde tegel is z
Zwaartepunt tegel[0,0] op $y_z = \sqrt{3}z/6$ en $x_z = z/2$
Twee modulo functies zijn nodig vanwege:
-- Samenneming van 3 halfgridrijen naar 2 vierkantgridrijen
-- inspringstructuur die zich om de 4 regels herhaalt

Zwaartepunt tegel[i,j]: $k = i \bmod 2 \quad l = i \bmod 4 \quad n = i/2$

$$y_z = \sqrt{3}z/6 + n\sqrt{3}z/2 + kz\sqrt{3}/6$$
$$= \sqrt{3}z/6\,(3n + k + 1)$$

$x_z =$

$l = 0$	$z/2 + j*z/2 = z/2(j+1)$
$l = 1$	$z + j*z/2 = z/2(j+2)$
$l = 2$	$z + j*z/2 = z/2(j+2)$
$l = 3$	$z/2 + j*z/2 = z/2(j+1)$

Normaal vierkant grid voor triominos

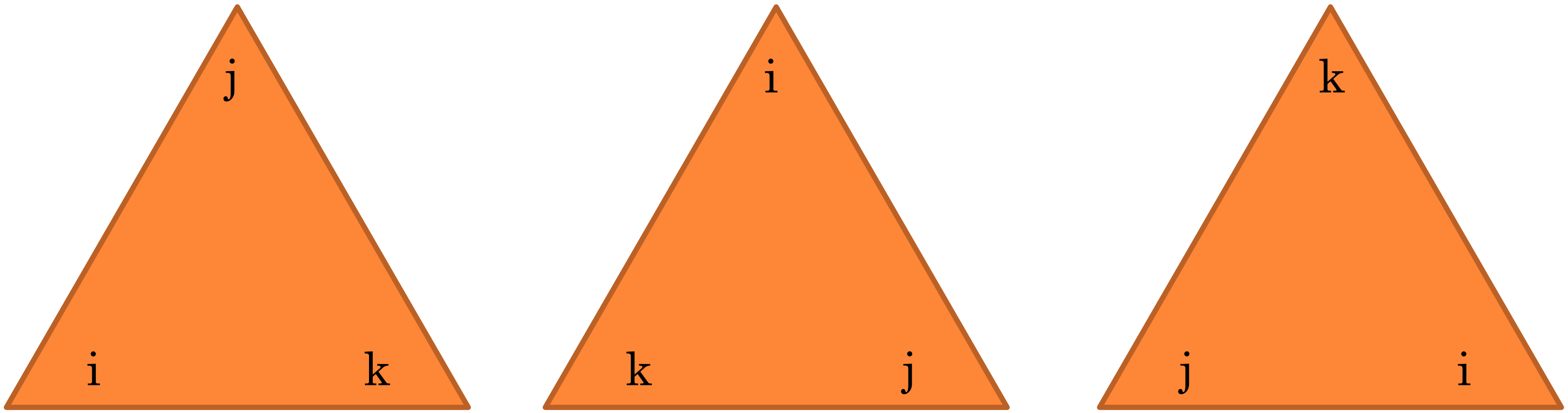
In plaats van een vierkant grid dat maar voor de helft beschikbaar is voor mogelijke triomino posities, kunnen we ook een normale adjacency matrix gebruiken mits we:
- afhankelijk van het rijnummer het vierkante aftastvenster voor 8 naaste buren aanpassen naar een L-vormig venster voor 3 naaste buren

We hebben nu wel een bruikbare representatie voor de posities waarop een bepaald genummerd triomino geplaatst kan worden, maar nog geen voorziening voor:

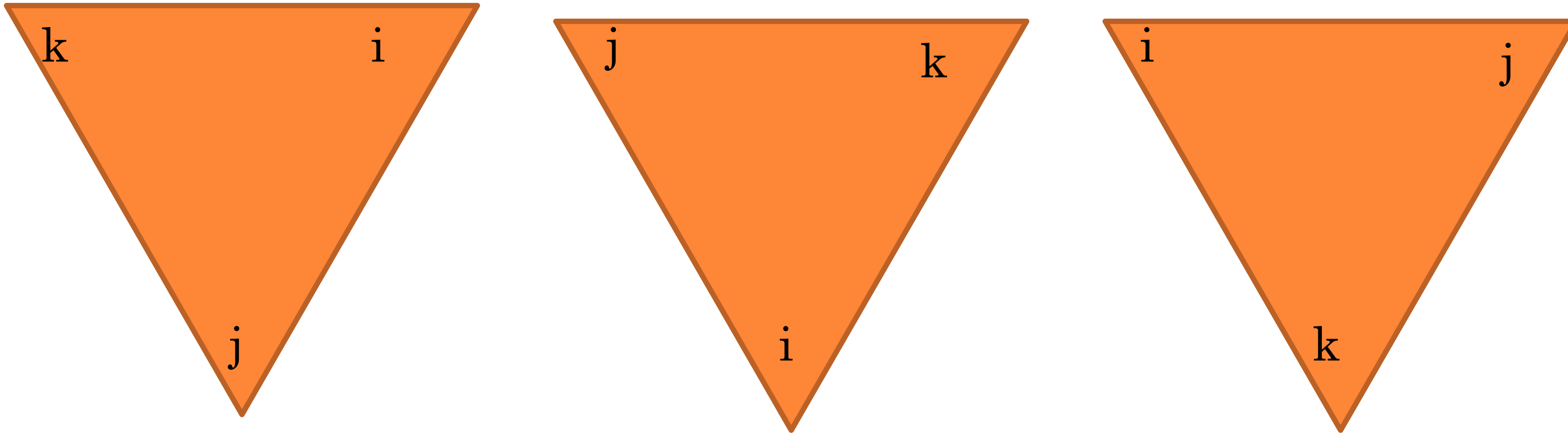
- De orientatie van een bepaalde triomino
- De aansluiting op (een) buurtriomino(s)

TRIOMINO ORIENTATIES

Oneven rijen orientatie basis: ik,kj,ji of ikj,kji,jik (kji cyclisch rond)

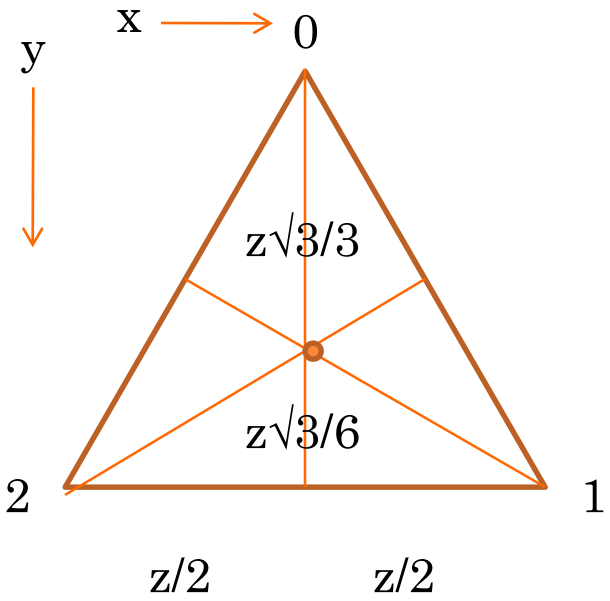


Orientatie O ε [0..5] geeft 3 mogelijke combinaties voor aansluiting
Orientatie basis (O ε [0..2]) kan alleen aansluiten op orientatie top (O ε [3..5])



Even rijen Orientatie top:ij,ki,jk of ijk,kij,jki (ijk cyclisch rond)

HOEKPUNTEN DRIEHOEKSTEGELS

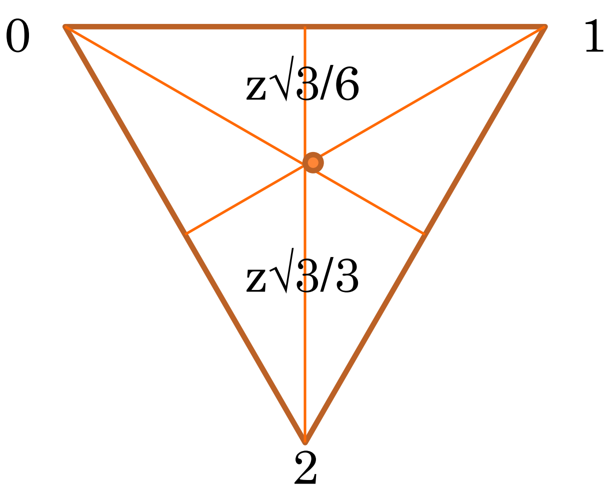


Als zwaartepunt Δ-tegel is y_z, x_z dan zijn met zijde z de coordinaten van de hoekpunten bij **basisorientatie**:

Hoekpunt0 = $y_z - z\sqrt{3}/3$, x_z

Hoekpunt1 = $y_z + z\sqrt{3}/6$, $x_z - z/2$

Hoekpunt2 = $y_z + z\sqrt{3}/6$, $x_z + z/2$



Als zwaartepunt Δ-tegel is y_z, x_z dan zijn met zijde z de coordinaten van de hoekpunten bij **toporientatie**:

Hoekpunt0 = $y_z - z\sqrt{3}/6$, $x_z - z/2$

Hoekpunt1 = $y_z - z\sqrt{3}/6$, $x_z + z/2$

Hoekpunt2 = $y_z + z\sqrt{3}/3$, x_z

Aansluiting met buurtriomino

Een triomino kan in elk hoekpunt een getal i,j,k ε [0..5] hebben; zijdes kunnen derhalve gekarakteriseerd worden door het getal aan het begin- en eindpunt van de zijde ij dan wel ji ε [00..55]
Dit geldt zowel met de klok mee als er tegenin.
Ongeacht of de triomino op z'n basis (oneven rijen) of op z'n tophoek (even rijen) wordt ingevoegd zijn dezelfde 3 combinaties beschikbaar m.b.t. een buurzijde nl ij,jk,ki

Zijdes van 2 triominos passen tegen elkaar als hun zijde codes omgekeerd zijn (ij<->ji; jk<->kj;ki<->ik)
Als een triomino buren heeft, dan moet voor elke buur de code van de aanliggende buurzijde het omgekeerde zijn van die van de betreffende triomino zijde

Uit de voorgaande slide kunnen we afleiden dat het voor mogelijke aansluiting niet uitmaakt of de triomino in **basis- dan wel toporientatie** wordt toegevoegd: beide bieden **dezelfde aansluitmogelijkheden** zij het gespiegeld.

56 Triomino stenen

Nr:i,j,k	Nr:i,j,k	Nr:i,j,k
1:0,0,0	20:0,4,5	39:2,2,4
2:0,0,1	21:0,5,5	40:2,2,5
3:0,0,2	22:1,1,1	41:2,3,3
4:0,0,3	23:1,1,2	42:2,3,4
5:0,0,4	24:1,1,3	43:2,3,5
6:0,0,5	25:1,1,4	44:2,4,4
7:0,1,1	26:1,1,5	45:2,4,5
8:0,1,2	27:1,2,2	46:2,5,5
9:0,1,3	28:1,2,3	47:3,3,3
10:0,1,4	29:1,2,4	48:3,3,4
11:0,1,5	30:1,2,5	49:3,3,5
12:0,2,2	31:1,3,3	50:3,4,4
13:0,2,3	32:1,3,4	51:3,4,5
14:0,2,4	33:1,3,5	52:3,5,5
15:0,2,5	34:1,4,4	53:4,4,4
16:0,3,3	35:1,4,5	54:4,4,5
17:0,3,4	36:1,5,5	55:4,5,5
18:0,3,5	37:2,2,2	56:5,5,5
19:0,4,4	38:2,2,3	

i,j,k ε [0..5]
monotoon, niet dalende reeks

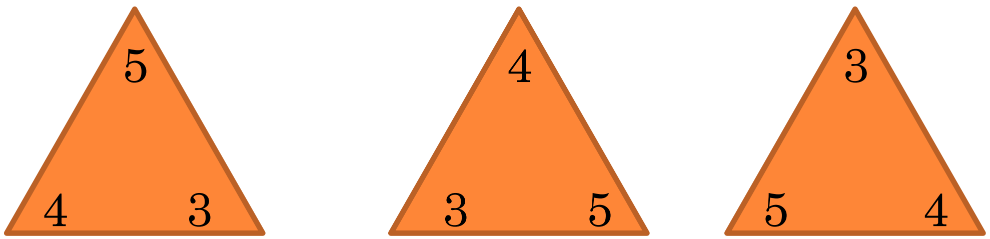
Op tegel met de Klok mee

b.v. 0,2,2 wel
2,1,1 niet

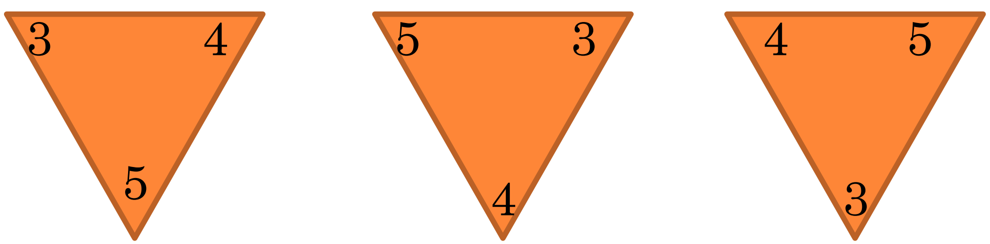
Codes zijdes:
Cyclisch 2 opvolgende uit 3
b.v. basis
28:21,13,32
top
28:12,31,23

Aansluitende tegels

Elke tegel:
3 basisorientaties;
3 toporientaties



Basis orientatie 28:
startpositie

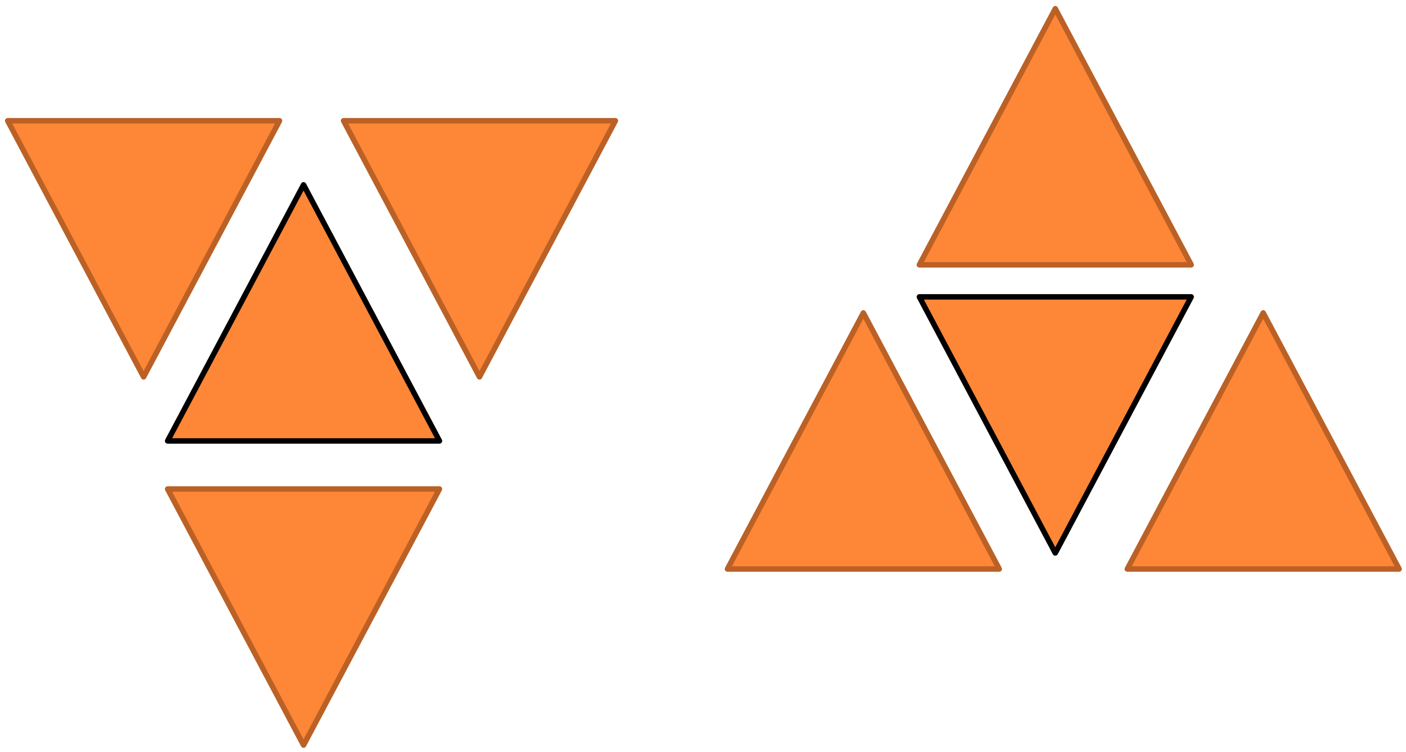


Top orientatie 28:
startpositie

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor aansluitende zijdes top:basis orientatiepaar

Hier geen aansluit mogelijkheid

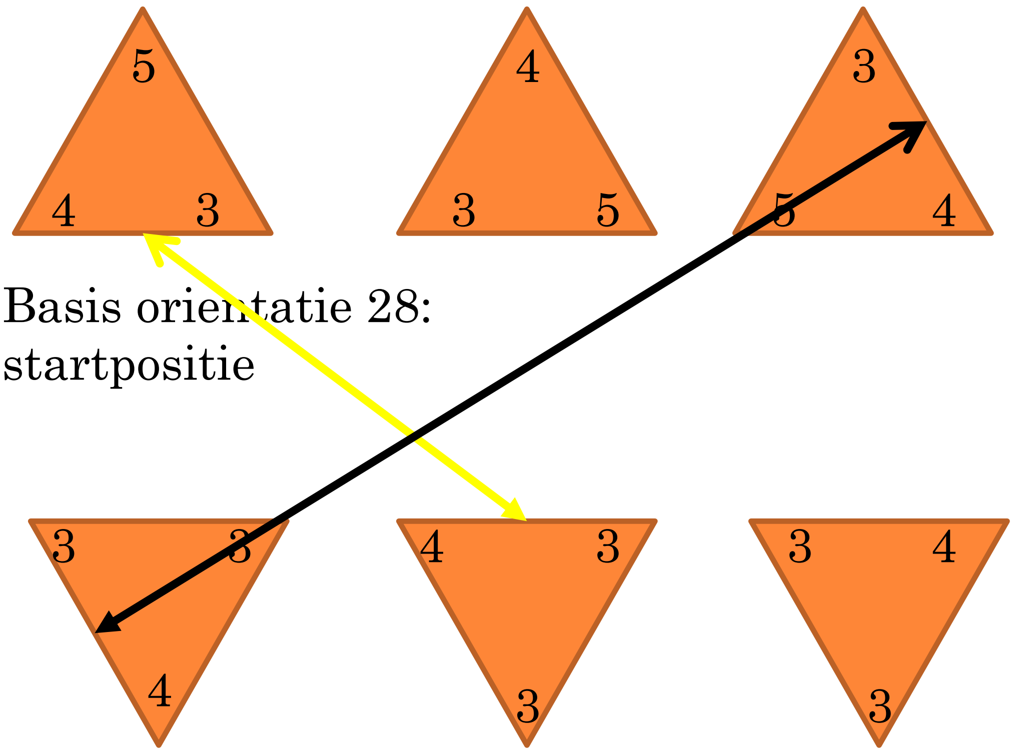
Aansluitende tegels



3 mogelijkheden voor top aan gegeven basis orientatie
3 mogelijkheden voor basis aan gegeven toporientatie

Het is dus handig apart de beschikbare top en basiscodeparen op te slaan bij de 56 tegels evenals welke aansluitzijde al/niet bezet is

Aansluitende tegels



Basis orientatie 28:
startpositie

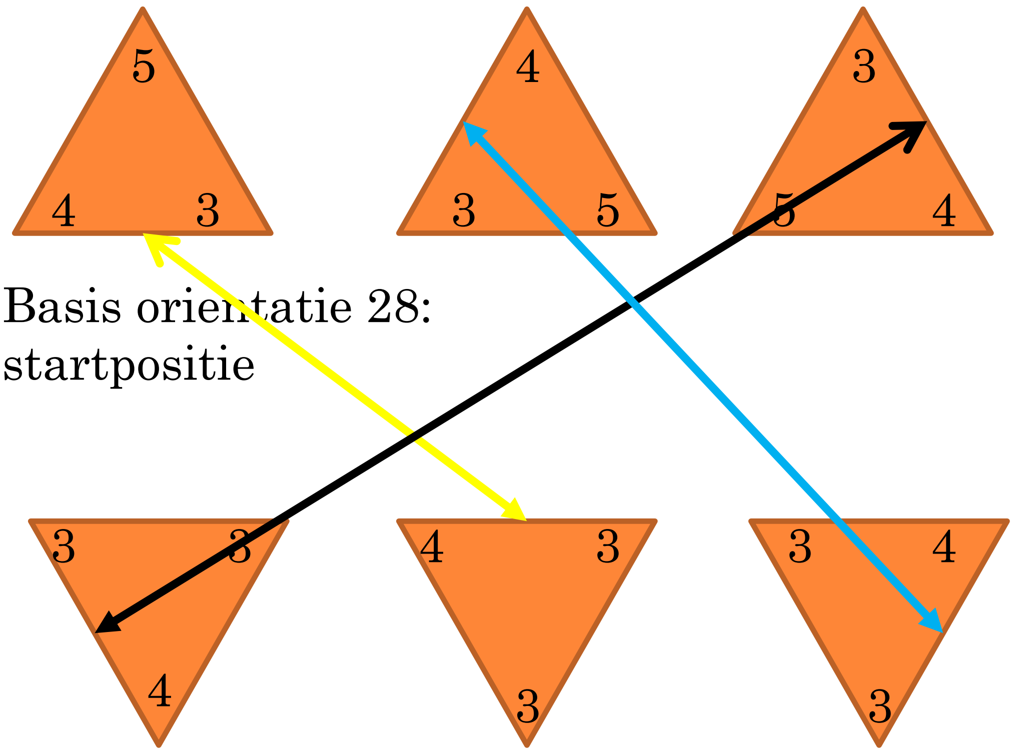
Top orientatie 48:
startpositie

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor aansluitende zijdes

Aleen mogelijk bij top:basis orientatiepaar

Hier 2 aansluit mogelijkheden?

Aansluitende tegels



Basis orientatie 28:
startpositie

Top orientatie 48:
startpositie

Aansluitvoorschrift:
Gelijke cijfers voor aansluitende zijdes

Aleen mogelijk bij top:basis orientatiepaar

Toch 3 aansluit mogelijkheden

PAUZE

DATASTRUCTUUR VOOR ADMINISTRATIE MATCHES TUSSEN BUURTRIOMINOS

Via het vierkante grid kan worden bijgehouden welke triomino welke maximaal 3 andere triominos als buren heeft;
Van de geplaatste triomino is naast een uniek nummer voor elke triomino (trionr ε [00..55] (er zijn 56 triominos) nodig:

de orientatie waarmee hij geplaatst is
de rij,kolom positie waarop hij geplaatst is

We hebben zo een O(1) methode om via de ID van een tegel zijn positie op het speelbord te vinden ID -> i,j
De naaste buren van i,j kunnen O(1) opgezocht worden gebruikmakend van het juiste L-template.

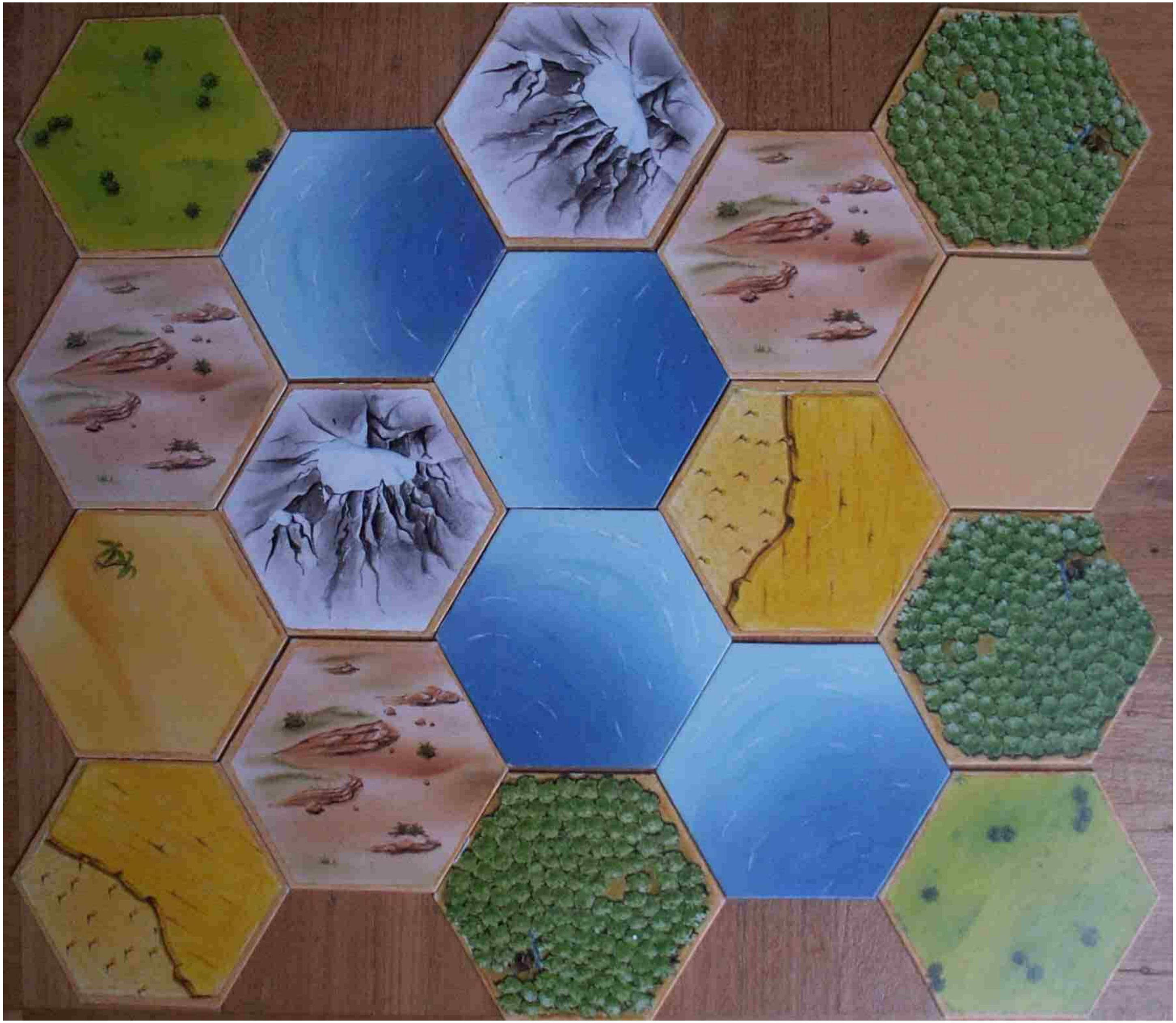
De rest is een kwestie van je aan de spelregels houden

Beginvoorwaarden triomino opzet met vierkant grid

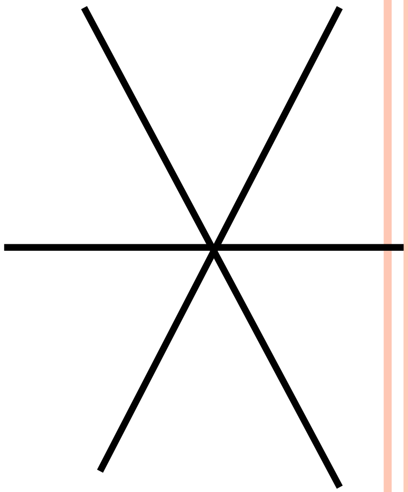
Als we een groot genoege matrix willen reserveren (het speelbord) en een geschikt startpunt voor de eerste triomino, dan moet het aaneengesloten eindresultaat niet buiten de matrix kunnen komen.

Wat is de langste slang van triominos die gevormd kan worden? Afgezien van of de aansluitvoorwaarden dat toelaten, kan vanuit het midden van het speelbord nooit verder dan 55 stappen naar links,rechts,boven of onder gekomen worden, Zodat een speelveld van 111x111 plaatsen waar op 55,55 de startsteen wordt gezet altijd voldoende zal zijn.

Een spelbord voor Catan



GRID OPBOUW VOOR EEN GELIJKZIJDIGE ZESHOEK (HEXAGON)

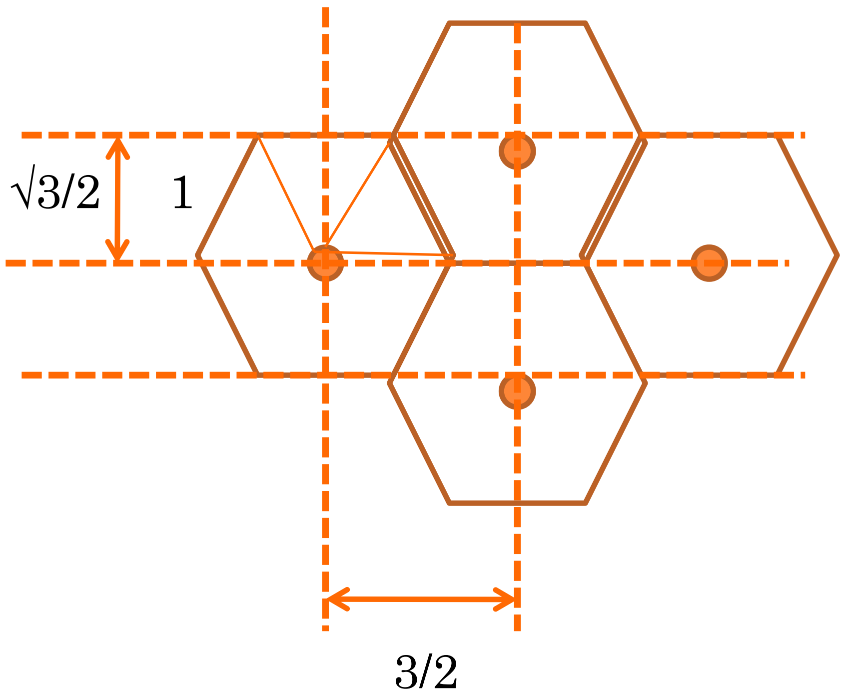


Connectivity = 6

Grid cel is gelijkzijdige driehoek

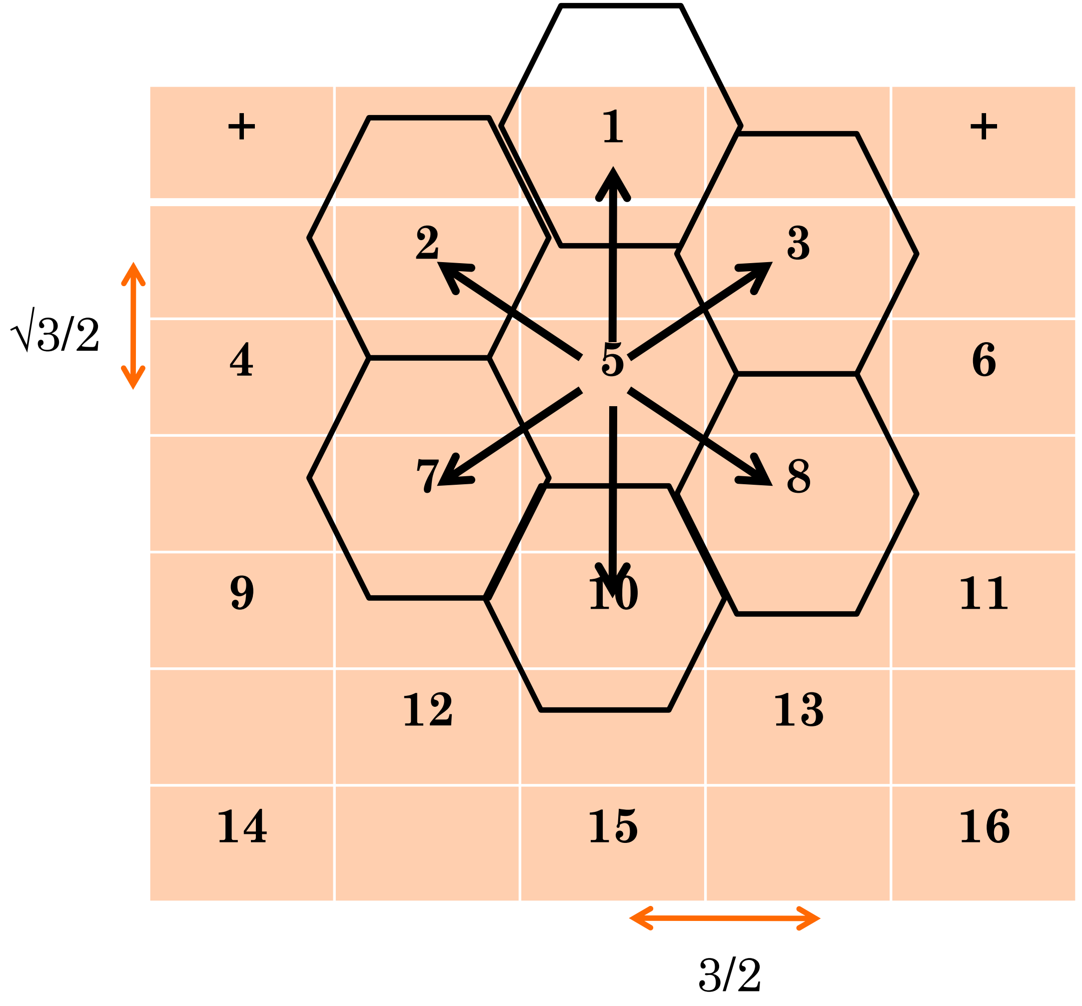
Posities middelpunten hexagons: even en oneven rijen halve grid verschoven

Verband tussen zijde hexagon en roosterafstanden

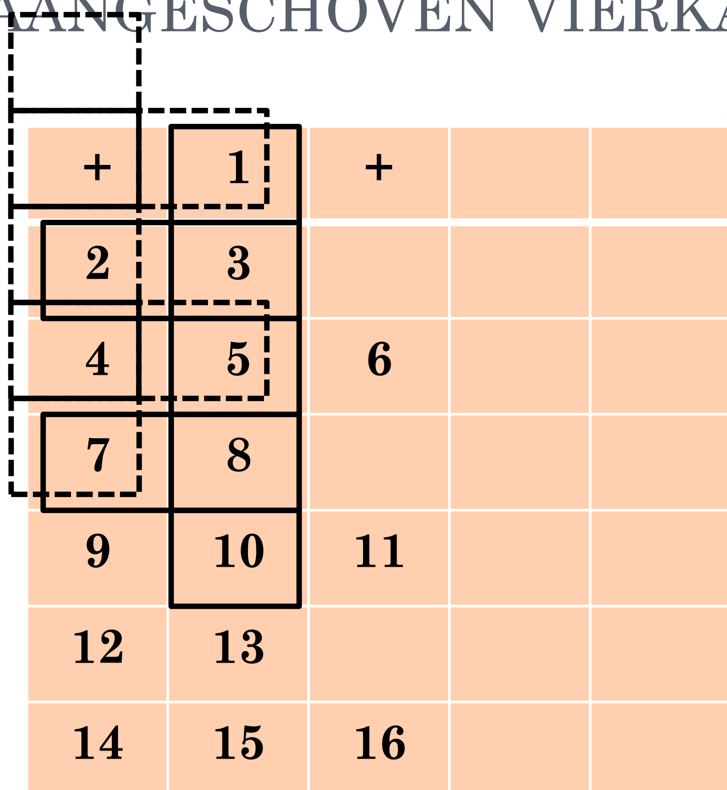


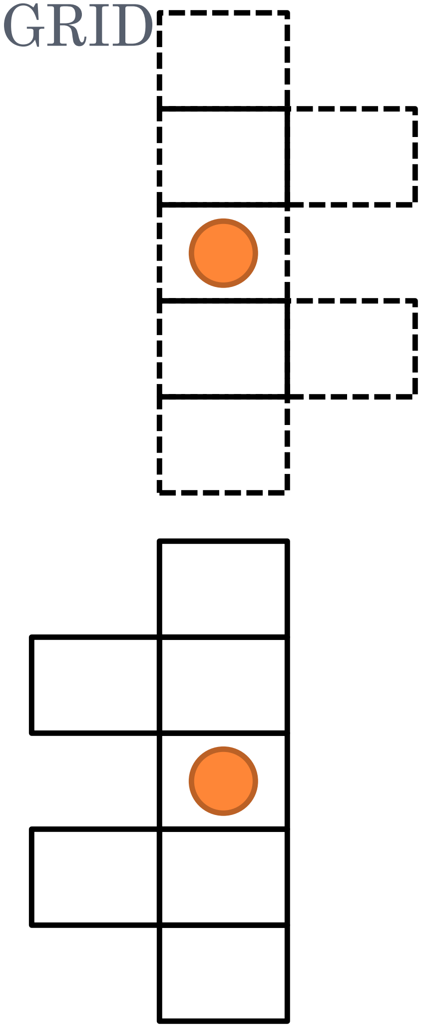
Zijde hexagon=1
Dx=3/2
Dy=√3/2
Naaste buur=√3
Oppervlak=3√3/2

Representatie op een dubbelbreed rechthoekig grid



Representatie 6 hexagon buren op een aangeschoven vierkant grid



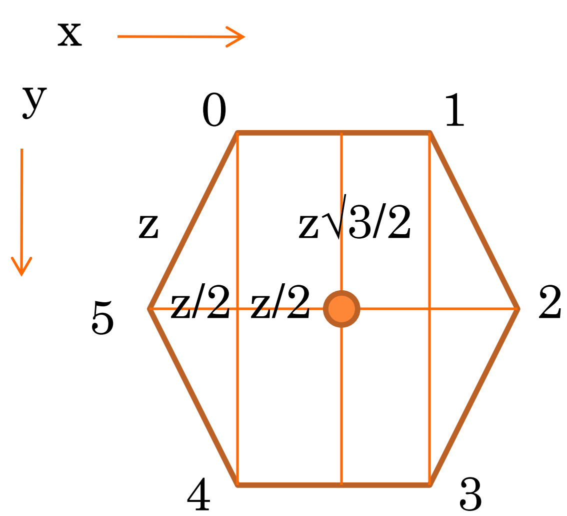


Afhankelijk van of de rij even/oneven is staan de tanden van het kam template naar rechts dan wel naar links

Fysieke locatie tegel in hex-grid

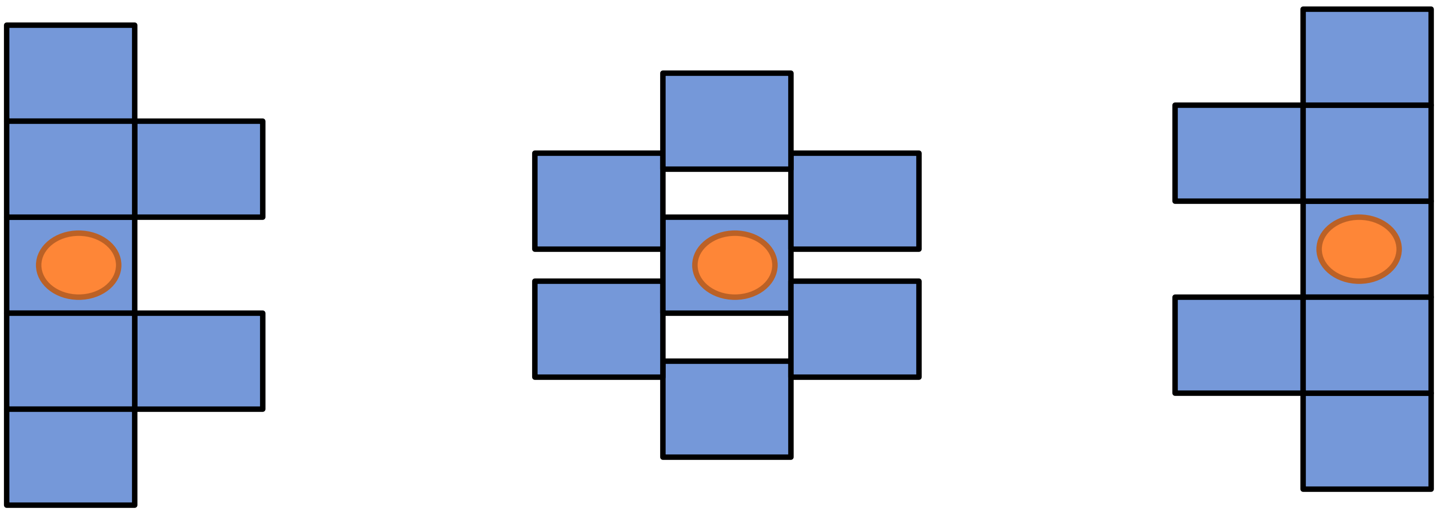
Rij 0 start met hexagon op basis
Rij 1 start met hexagon op basis naar rechts verschoven
Modulo 2 functie vanwege herhaling elke 2 rijen

Tegel=hexagon met zijde z; tegel[i,j] met i,j ε [0..max]
Zwaartepunt tegel[0,0]: $y=\sqrt{3}z/2$ $x=z$
Tegel[i,j]: $k = i \bmod 2$
$y_z = (i+1)z\sqrt{3}/2$
$x_z =$
$k = 0$ $x_z = 3jz + z = (3j+1)z$
$k = 1$ $x_z = 3jz/2 + 5z/2 = (3j+5)z/2$



Als zwaartepunt hexagon met zijde z
x_z,y_z is dan zijn coordinaten van de hoekpunten:
Hoekpunt0 = $y_z - z\sqrt{3}/2$, $x_z - z/2$
Hoekpunt1 = $y_z - z\sqrt{3}/2$, $x_z + z/2$
Hoekpunt2 = y_z , $x_z + z$
Hoekpunt3 = $y_z + z\sqrt{3}/2$, $x_z + z/2$
Hoekpunt4 = $y_z + z\sqrt{3}/2$, $x_z - z/2$
Hoekpunt5 = y_z , $x_z - z$

6-VERBONDEN BUREN OP HEXAGONAAL EN VIERKANT GRID



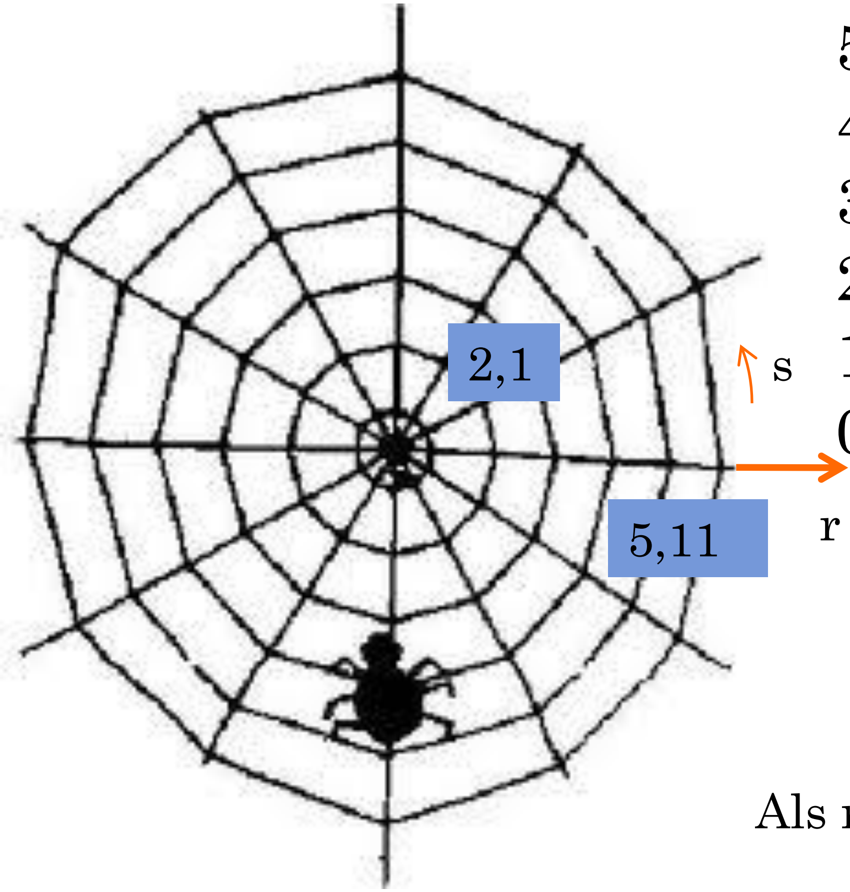
Naaste buren van (i,j) bij kamR:
i-1,j   i-1,j+1   i-2,j   i+1,j   i+1,j+1   i+2,j

Naaste buren van (i,j) bij kamL:
i-1,j   i-1,j-1   i-2,j   i+1,j   i+1,j-1   i+2,j

Afhankelijk van of de speelcel op een oneven dan wel even rij geregistreerd staat zijn z'n 6-verbonden buren middels de kam templates direct te vinden

Een grid voor poolcoordinaten

Naaste buren op sectorenstructuur



7												
6												-
5	-										-	+
4												-
3		-										
2	-	+	-									
1		-			-							
0				-	+	-					-	

r

s mod 2π

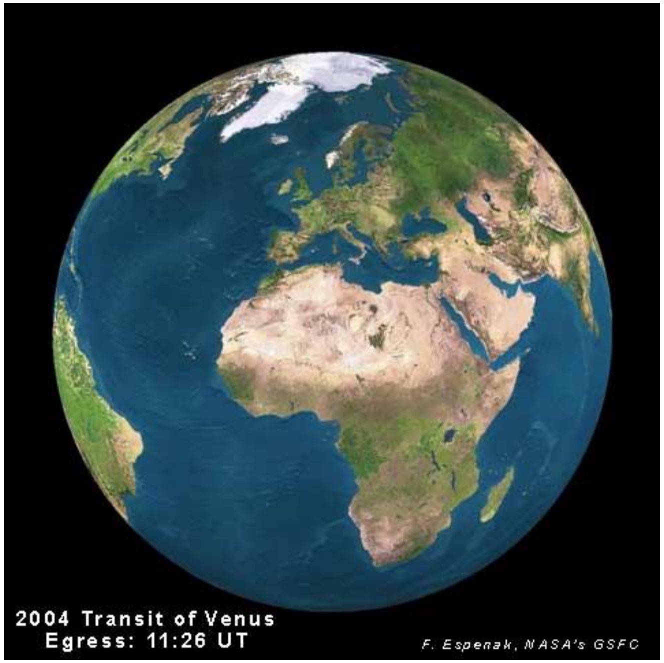
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Als r<0 -> r=|r|-1, s = (s+6) mod 12

Toroidale graaf in s-richting

geen negatieve r sectoren!

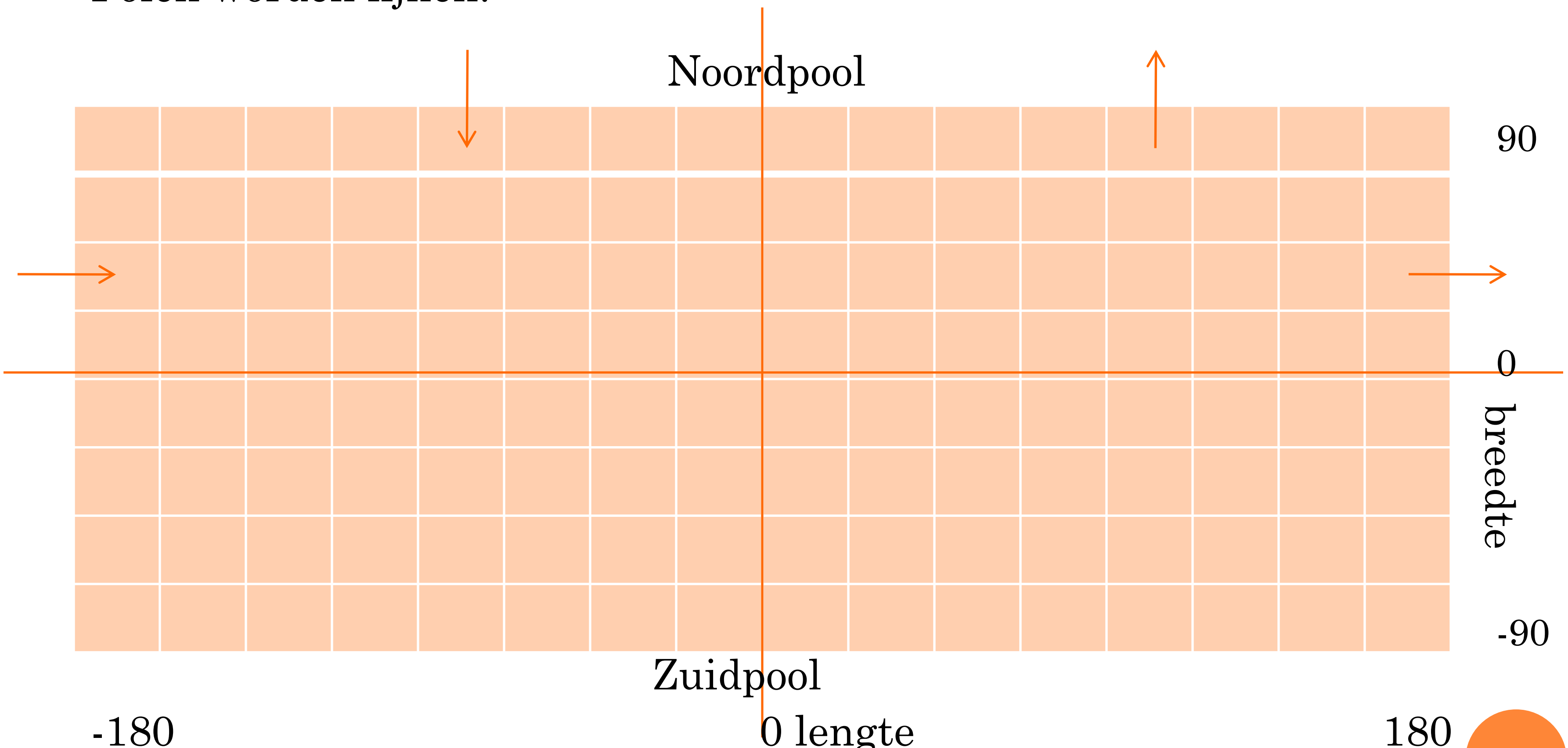
Een grid voor geografische coordinaten



Toroidale graaf van lengte- en breedtegraad
Lengte [-180..180], breedte [-90..90]

Bolopppervlak met Lengte- en breedtegraad

Polen worden lijnen!

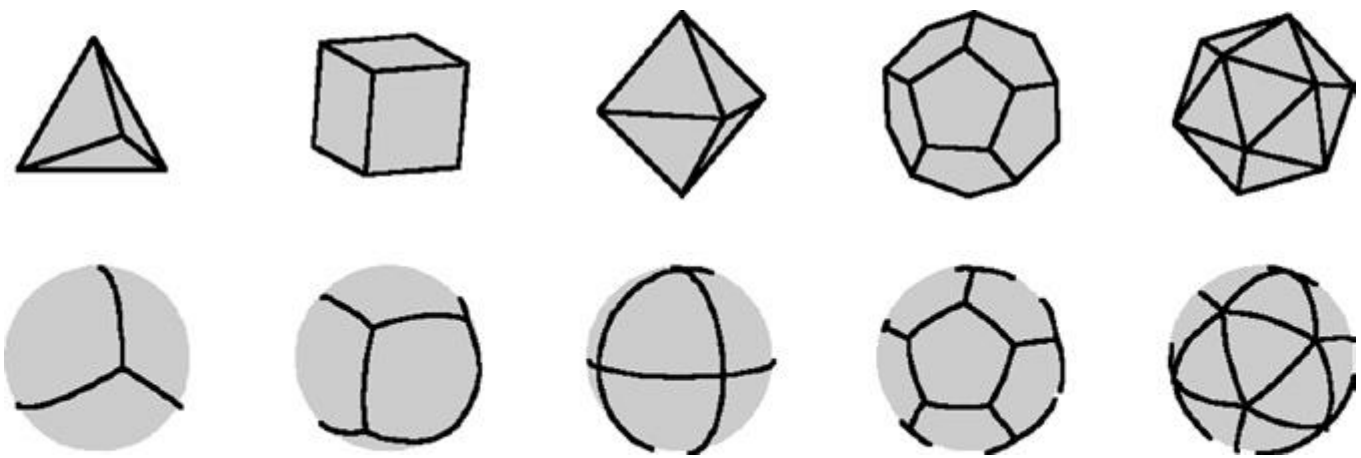


Toroidale graaf in beide richtingen

Nadeel: deze cellen zijn qua oppervlakte heel ongelijk!!

Regelmatige beleggingen van een buitenoppervlak

- 5 platonische vormen voor veelvlak- en boloppervlak

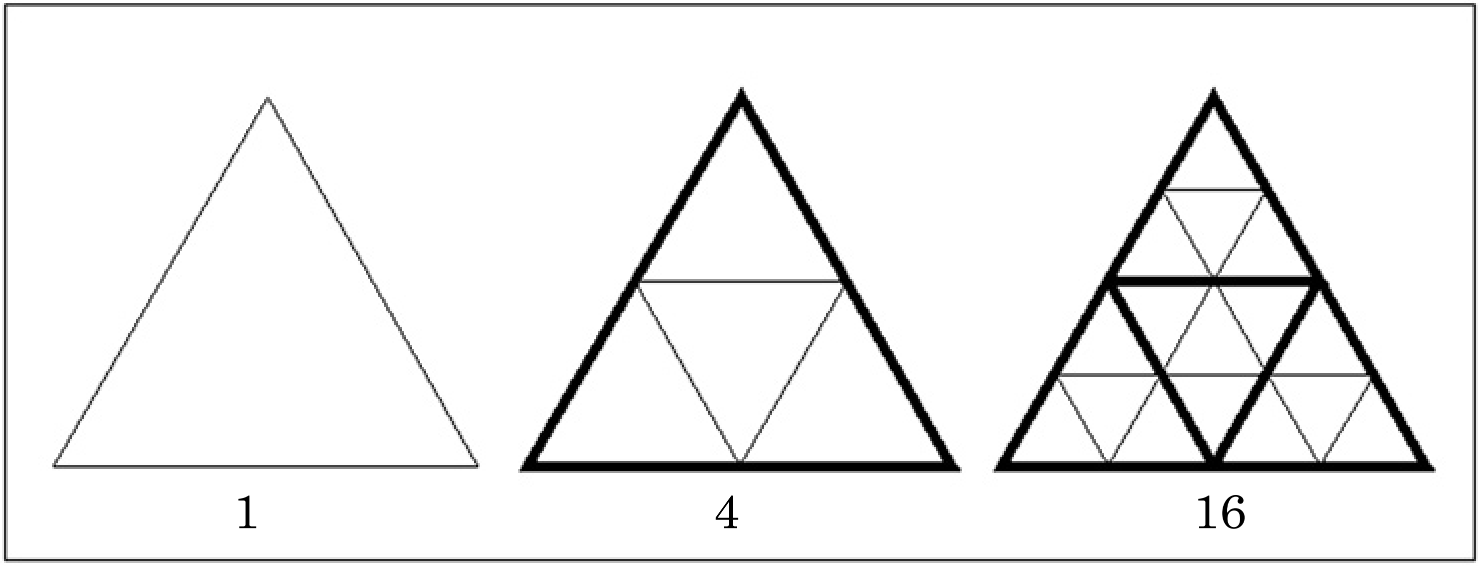


- Tetraheder hexadron octaheder dodecaheder isocaheder

Mogelijk uitgangspunt verdeling gelijke gekromde driehoeken

Verfijning van een driehoeksbelegging

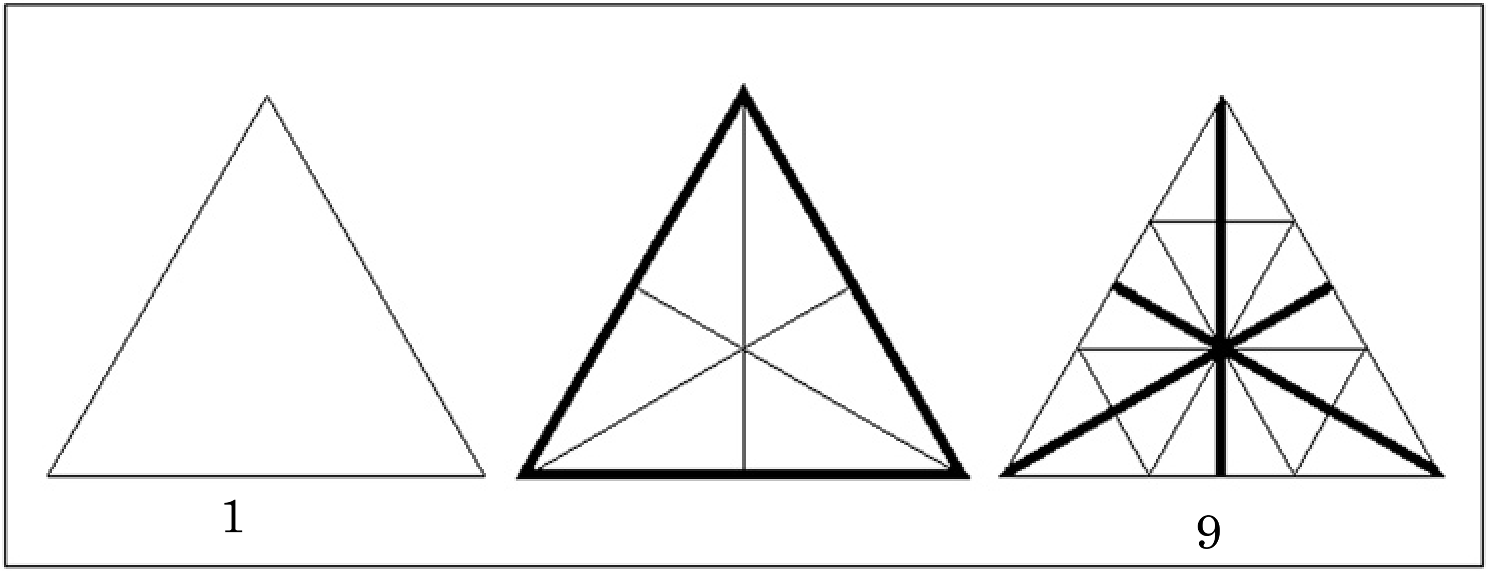
- Door middens van zijden te verbinden



- Dit recept kan naar believen herhaald worden
- Zo blijft ook de hogere resolutie een beschrijving van gelijke gebogen driehoeksoppervlakken

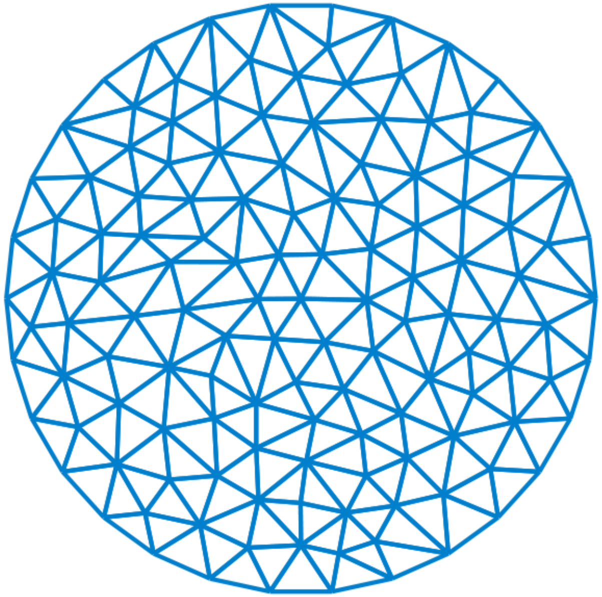
ALTERNATIEVE VERFIJNING Δ

- Via hoogte/zwaartelijnen



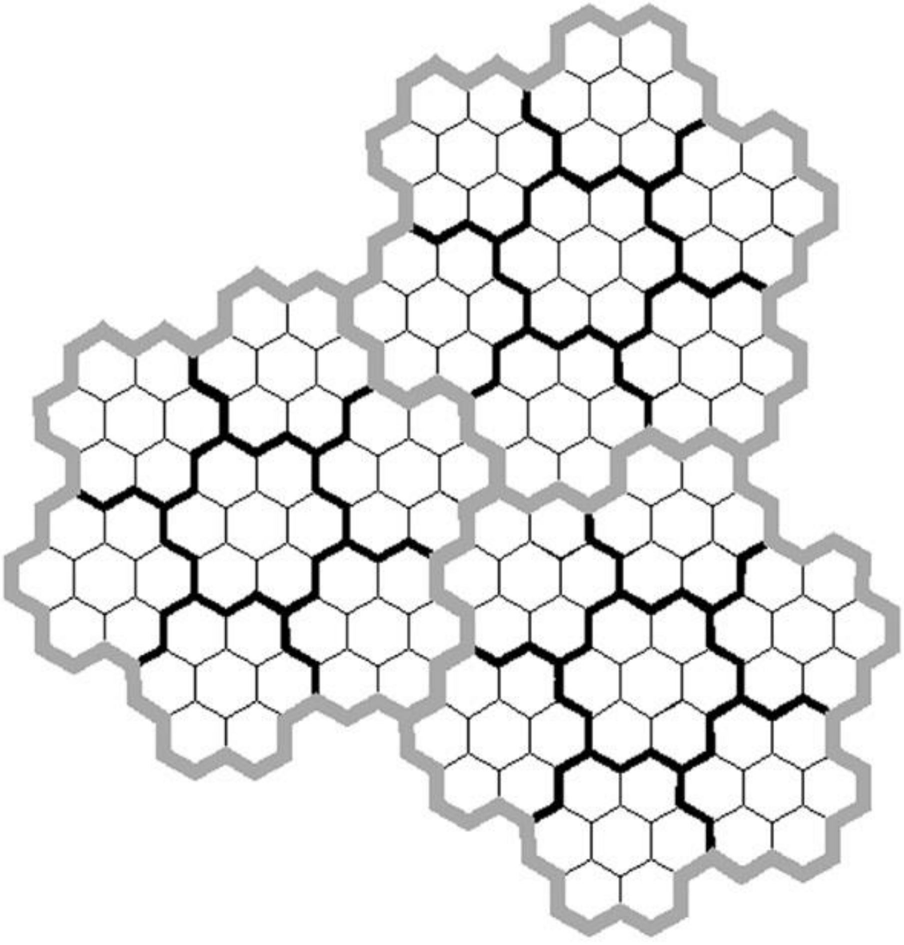
Een driehoeksbelegging van het aardoppervlak

The worldwide satellite triangulation camera station network.
Courtesy NOAA



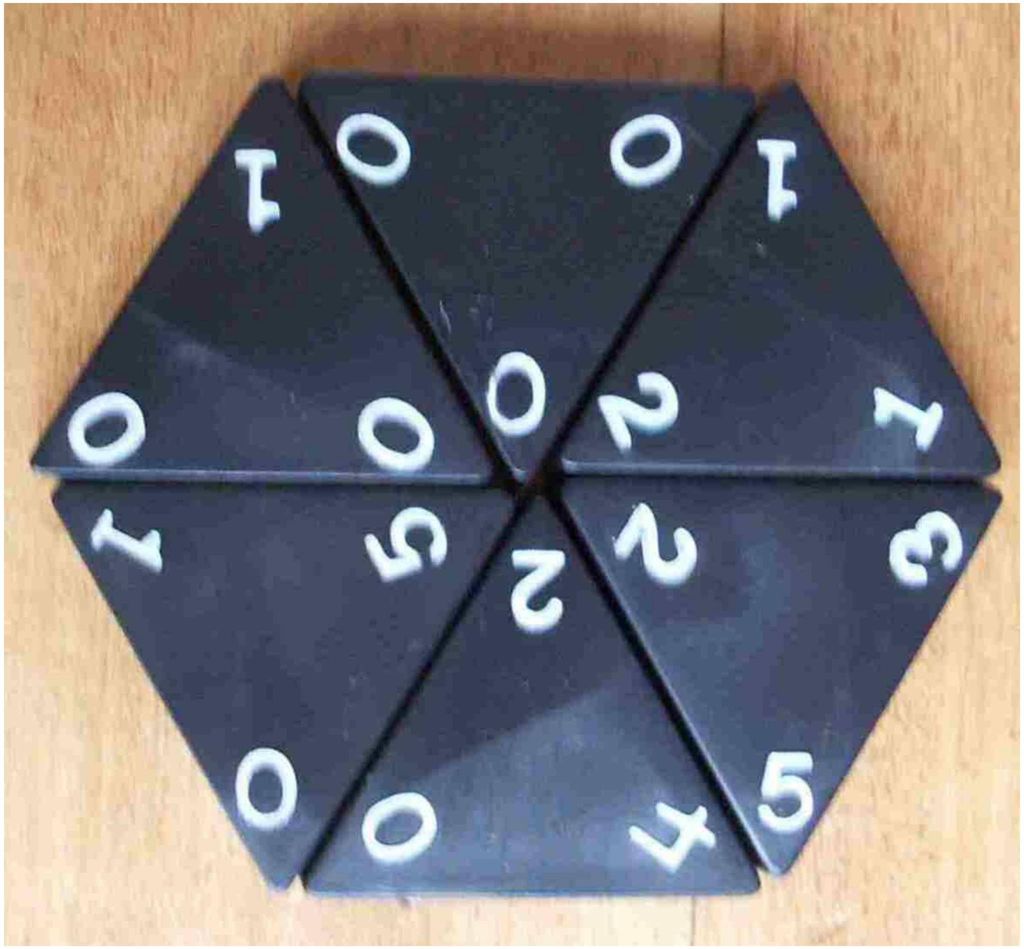
Door rotaties tracht men b.v. alle knooppunten zoveel mogelijk buiten de landmassa's te laten vallen en/of met knooppunten uit de buurt van steden te blijven

Aggregatie van hexagonale cellen naar hoger niveau



7 naar 1

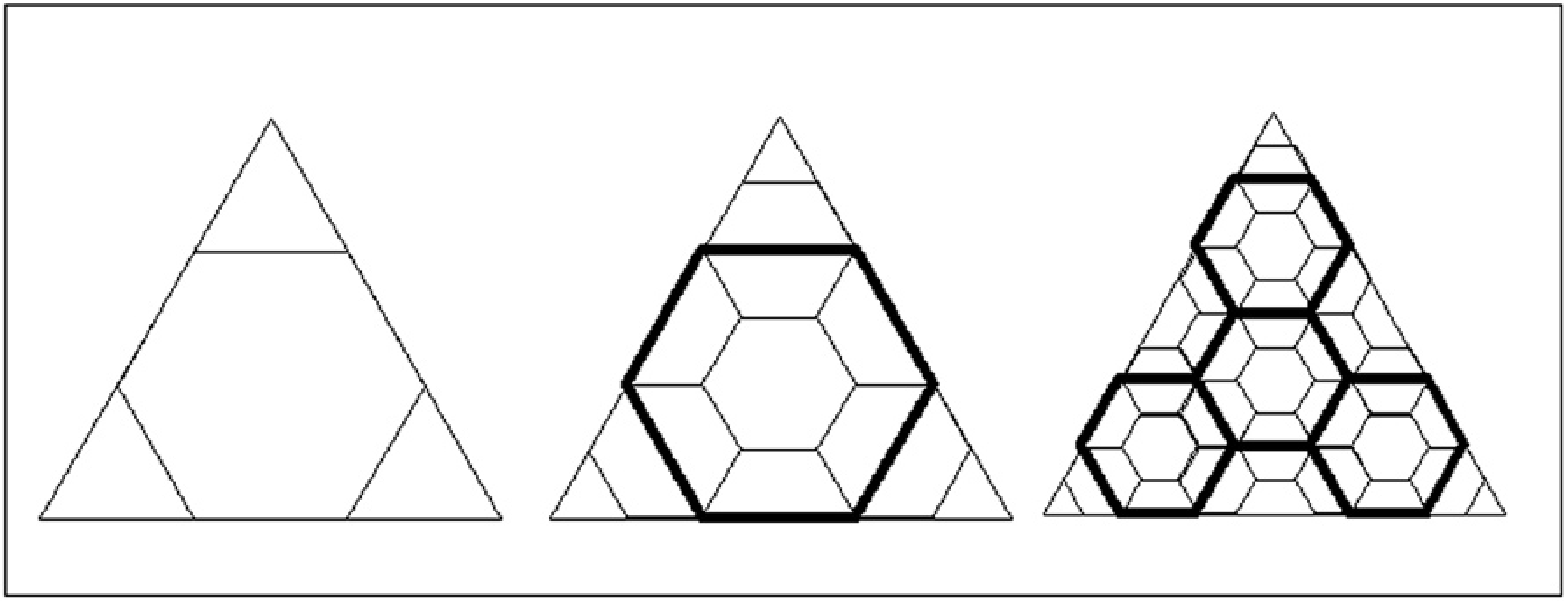
Aggregatie van hexagon uit driehoeksbelegging



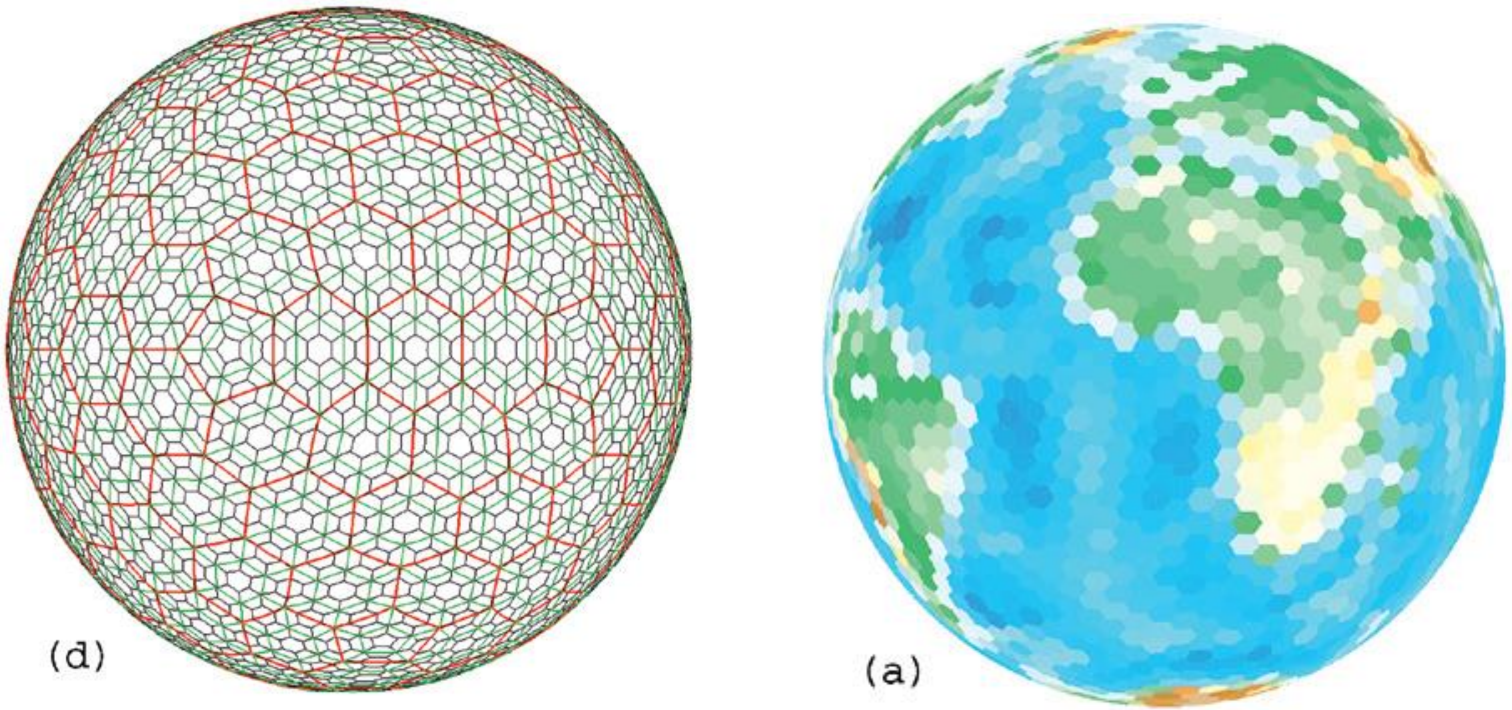
uit een hexagonale belegging kan altijd een driehoeksbelegging gemaakt worden maar omgekeerd?

OPDEELSCHEMA VOOR DRIEHOEKSBELEGGING NAAR HEXAGONALE BELEGGING

- Via driedeling zijdes naar 1.5 hexagon/driehoek



Geodesic Discrete Global Grid Systems **Kevin Sahr, Denis White, and A. Jon Kimerling**



Lokale eigenschap hier hoogte per hexagon gemiddeld en vertaald in celkleur (blauw is onder zeenivo)

Samenvatting regelmatige (opper)vlakverdeling

- Bomen niet efficient voor snel O(1) ophalen naaste-buur informatie
- Vierkante matrix voor bipartite graaf kruisverbindingen vertikale en horizontale cellen
- Ook regelmatige driehoeken en zeshoeken passen in vierkante matrix opzet met aanpassing naaste buuromgeving (L- en Kam-templates)
- Met speciale dank aan:
- Geodesic Discrete Global Grid Systems **Kevin Sahr, Denis White, and A. Jon Kimerling** waar een aantal afbeeldingen uit gebruikt zijn.

Drozdek

- Niets van dit alles in Drozdek