Algebra van spellen

Ludo Pulles, Universiteit Leiden.

31 maart 2020

Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Definities

Vanwege het zelf-refererende karakter van spellen, een recursieve definitie:

Definitie ('top-down')

Een spel $\boldsymbol{G}$, is een geordend paar van spelverzamelingen $\boldsymbol{\mathcal{G}^L}, \boldsymbol{\mathcal{G}^R}$. Notatie:

$$\boldsymbol{G} := \left\{ \boldsymbol{\mathcal{G}^L} \;\middle|\; \boldsymbol{\mathcal{G}^R} \right\}. \tag{1}$$

Definities

Vanwege het zelf-refererende karakter van spellen, een recursieve definitie:

Definitie ('top-down')

Een spel $\boldsymbol{G}$, is een geordend paar van spelverzamelingen $\boldsymbol{\mathcal{G}^L}, \boldsymbol{\mathcal{G}^R}$. Notatie:

$$\boldsymbol{G} := \left\{ \boldsymbol{\mathcal{G}^L} \;\middle|\; \boldsymbol{\mathcal{G}^R} \right\}. \tag{1}$$

Opmerking

We nemen aan dat $\boldsymbol{G}$ niet voorkomt in $\boldsymbol{\mathcal{G}^L}$ en $\boldsymbol{\mathcal{G}^R}$. Anders spreek je van een 'lussig' spel.

Spel notatie

We gebruiken wederom korte notatie, bv.:

$$\{\,\{\,G_1, G_2\,\} \mid \emptyset\,\} = \{\,G_1, G_2 \mid \;\}\,.$$

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\;\mid\;\}\,,\\ 1 &:= \{\,0 \mid\;\}\,,\\ -1 &:= \{\;\mid 0\,\}\,,\\ * &:= \{\,0 \mid 0\,\}\,. \end{aligned}$$

Leeftijd van een spel

Definitie (4.1)

De leeftijd van een spel $\boldsymbol{G}$ is

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) := 1 + \max_{\boldsymbol{H} \in \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \cup \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{H}),$$

voor alle $\boldsymbol{G} \neq \mathbf{0}$ en $\boldsymbol{L}(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$.

Leeftijd van een spel

Definitie (4.1)

De leeftijd van een spel $\boldsymbol{G}$ is

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) := 1 + \max_{\boldsymbol{H} \in \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \cup \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{H}),$$

voor alle $\boldsymbol{G} \neq \mathbf{0}$ en $\boldsymbol{L}(0) := 0$.

Voorbeeld

$\boldsymbol{L}(0) = 0, \qquad \boldsymbol{L}(1) = 1 + \boldsymbol{L}(0) = 1, \qquad \boldsymbol{L}(\{ -1 \mid 1 \}) = 2.$

Definitie (4.1)

De leeftijd van een spel $\boldsymbol{G}$ is

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) := 1 + \max_{\boldsymbol{H} \in \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \cup \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{H}),$$

voor alle $\boldsymbol{G} \neq 0$ en $\boldsymbol{L}(0) := 0$.

Voorbeeld

$\boldsymbol{L}(0) = 0, \qquad \boldsymbol{L}(1) = 1 + \boldsymbol{L}(0) = 1, \qquad \boldsymbol{L}(\{\, -1 \mid 1 \,\}) = 2.$

Opmerking

We kunnen een uitspraak $\forall \boldsymbol{G} \colon \boldsymbol{P}(\boldsymbol{G})$ bewijzen door inductie op leeftijd, want $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{H}) < \boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ voor alle $\boldsymbol{H} \in \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \cup \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}}$.

Lemma (4.2)

Het aantal spellen met leeftijd $\leq \boldsymbol{n}$, *afgekort* $\mathbf{g}(\boldsymbol{n})$, *is eindig.*

Lemma (4.2)

Het aantal spellen met leeftijd $\leq \boldsymbol{n}$, *afgekort* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})$, *is eindig.*

Bewijs.

Inductie op $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.
$\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$: $\boldsymbol{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.
Een spel met leeftijd $\leq \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ wordt gegeven door twee deelverzamelingen van spellen met leeftijd $\leq \boldsymbol{n}$. Hierdoor is $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$ ook eindig:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n} + 1) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})} \cdot \mathbf{2}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})} = \mathbf{4}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n})}. \tag{2}$$

□

Opmerkingen

1. De $\boldsymbol{g(n)}$ is een slechte bovengrens voor aantal spellen tot op spelequivalentie (zie later).

Opmerkingen

1. De $\boldsymbol{g(n)}$ is een slechte bovengrens voor aantal spellen tot op spelequivalentie (zie later).
2. Transfiniete leeftijden zijn niet uitgesloten, bv:

$$\omega := \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \mid \ \}, \qquad \text{(zie hoofdstuk } \omega\text{)}.$$

Opmerkingen

1. De $\boldsymbol{g(n)}$ is een slechte bovengrens voor aantal spellen tot op spelequivalentie (zie later).
2. Transfiniete leeftijden zijn niet uitgesloten, bv:

$$\omega := \{\, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots \mid \ \} , \qquad \text{(zie hoofdstuk } \omega\text{).}$$

3. Alternatieve definitie ('bottom-up'):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{S}_0} &:= \{\, \mathbf{0} \,\} , \\ \boldsymbol{\mathcal{S}_{n+1}} &:= \Big\{ \{\, \mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R \,\} : \mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_n) \Big\} \quad (\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Een spel is nu een element van $\boldsymbol{\mathcal{S}} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{S}_n}$, en $\boldsymbol{g(n)} = |\boldsymbol{\mathcal{S}_n}| \quad (\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$.

Optelling

Definitie

Zij $G = \{ \mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R \}$, $H = \{ \mathcal{H}^L \mid \mathcal{H}^R \}$ spellen, dan is

$$G + H := \left\{ \mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L \,\middle|\, \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R \right\},$$

waarbij voor een spel x en spelverzameling S, $x + S = \{ x + s \mid s \in S \}$ en $S + x = \{ s + x \mid s \in S \}$. In het bijzonder, $x + \emptyset = \emptyset$.

Axioma:

> *"In een som van spellen, kan een speler in elke term spelen." (p. 60)*

Eenheid

Stelling (4.4)

Voor elk spel $\boldsymbol{G}$, *geldt* $\boldsymbol{G} + \mathbf{0} = \boldsymbol{G}$.

Stelling (4.4)

Voor elk spel $\boldsymbol{G}$, geldt $\boldsymbol{G} + 0 = \boldsymbol{G}$.

Bewijs.

Bewijs door inductie op spellen:
Zij $\boldsymbol{G} = \{\, \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \mid \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} \,\}$, en neem aan dat $\boldsymbol{H} + \mathbf{0} = \boldsymbol{H}$ voor alle spellen $\boldsymbol{H}$ met kleinere leeftijd. Dan,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} + 0 &= \left\{\, \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} + 0, \boldsymbol{G} + \emptyset \;\middle|\; \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} + 0, \boldsymbol{G} + \emptyset \,\right\} \\ &= \left\{\, \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \;\middle|\; \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} \,\right\} = \boldsymbol{G}, \end{aligned}$$

want $\boldsymbol{G} + \emptyset = \{\, \boldsymbol{G} + \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \emptyset \,\} = \emptyset$. $\square$

Commutativiteit

Stelling (Opg. 4.5a)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *spellen. Dan geldt* $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}$.

Commutativiteit

Stelling (Opg. 4.5a)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *spellen. Dan geldt* $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}$.

Bewijs.

Met inductie op $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H})$:

$$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} = \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{L}} \;\middle|\; \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{R}} \right\}$$

□

Stelling (Opg. 4.5a)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ spellen. Dan geldt $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}$.

Bewijs.

Met inductie op $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H})$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} &= \left\{ \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{L}} \,\middle|\, \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{R}} \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{L}}, \quad \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{H} \,\middle|\, \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^{\boldsymbol{R}}, \quad \mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{H} \right\}
\end{aligned}$$

□

Stelling (Opg. 4.5a)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *spellen. Dan geldt* $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}$.

Bewijs.

Met inductie op $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H})$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} &= \left\{ \mathcal{G}^L + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^L \,\middle|\, \mathcal{G}^R + \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^R \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^L, \quad \mathcal{G}^L + \boldsymbol{H} \,\middle|\, \boldsymbol{G} + \mathcal{H}^R, \quad \mathcal{G}^R + \boldsymbol{H} \right\} \\
&\overset{(ind)}{=} \left\{ \mathcal{H}^L + \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{H} + \mathcal{G}^L \,\middle|\, \mathcal{H}^R + \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{H} + \mathcal{G}^R \right\}
\end{aligned}$$

□

Commutativiteit

Stelling (Opg. 4.5a)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *spellen. Dan geldt* $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{G}$.

Bewijs.

Met inductie op $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} &= \left\{ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G}+\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{L}} \,\middle|\, \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{G}+\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{R}} \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{G}+\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{L}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{H} \,\middle|\, \boldsymbol{G}+\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{R}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{H} \right\} \\
&\overset{(ind)}{=} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{H}+\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{L}} \,\middle|\, \boldsymbol{\mathcal{H}}^{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{H}+\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\boldsymbol{R}} \right\} \\
&= \boldsymbol{H}+\boldsymbol{G}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Associativiteit

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})$.

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})$.

Bewijs.

Voor de linkerkant met inductie op $\boldsymbol{L}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})$:

$$((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})^{\boldsymbol{L}} = (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}, \qquad (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}}$$

$\square$

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})$.

Bewijs.

Voor de linkerkant met inductie op $\boldsymbol{L}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})$:

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})^{\boldsymbol{L}} &= (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}, & & (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \\ &= (\mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}, \quad (\boldsymbol{G}+\mathcal{H}^{\boldsymbol{L}})+\boldsymbol{J}, & & (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \end{aligned}$$

$\square$

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})$.

Bewijs.

Voor de linkerkant met inductie op $\boldsymbol{L}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})$:

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})^{\boldsymbol{L}} &= \quad (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \\
&= \quad (\mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}, \quad (\boldsymbol{G}+\mathcal{H}^{\boldsymbol{L}})+\boldsymbol{J}, \quad (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \\
&\overset{(ind)}{=} \quad \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}), \quad \boldsymbol{G}+(\mathcal{H}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}), \quad \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}})
\end{aligned}
$$

$\square$

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J} = \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})$.

Bewijs.

Voor de linkerkant met inductie op $\boldsymbol{L}((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})$:

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J})^{\boldsymbol{L}} &= (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}, && && (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \\
&= (\mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{H})+\boldsymbol{J}, && (\boldsymbol{G}+\mathcal{H}^{\boldsymbol{L}})+\boldsymbol{J}, && (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H})+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}} \\
&\overset{(ind)}{=} \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}), && \boldsymbol{G}+(\mathcal{H}^{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{J}), && \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\mathcal{J}^{\boldsymbol{L}}) \\
&= \mathcal{G}^{\boldsymbol{L}}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}), && \boldsymbol{G}+(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J})^{\boldsymbol{L}}
\end{aligned}
$$

□

Stelling (Opg. 4.5b)

Voor alle $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$, *geldt* $(\mathbf{G}+\mathbf{H})+\mathbf{J} = \mathbf{G}+(\mathbf{H}+\mathbf{J})$.

Bewijs.

Voor de linkerkant met inductie op $\mathbf{L}((\mathbf{G}+\mathbf{H})+\mathbf{J})$:

$$
\begin{aligned}
((\mathbf{G}+\mathbf{H})+\mathbf{J})^{\mathbf{L}} &= (\mathbf{G}+\mathbf{H})^{\mathbf{L}}+\mathbf{J}, & & (\mathbf{G}+\mathbf{H})+\mathcal{J}^{\mathbf{L}} \\
&= (\mathcal{G}^{\mathbf{L}}+\mathbf{H})+\mathbf{J}, \quad (\mathbf{G}+\mathcal{H}^{\mathbf{L}})+\mathbf{J}, & & (\mathbf{G}+\mathbf{H})+\mathcal{J}^{\mathbf{L}} \\
&\overset{(ind)}{=} \mathcal{G}^{\mathbf{L}}+(\mathbf{H}+\mathbf{J}), \quad \mathbf{G}+(\mathcal{H}^{\mathbf{L}}+\mathbf{J}), & & \mathbf{G}+(\mathbf{H}+\mathcal{J}^{\mathbf{L}}) \\
&= \mathcal{G}^{\mathbf{L}}+(\mathbf{H}+\mathbf{J}), \quad \mathbf{G}+(\mathbf{H}+\mathbf{J})^{\mathbf{L}} \\
&= (\mathbf{G}+(\mathbf{H}+\mathbf{J}))^{\mathbf{L}}.
\end{aligned}
$$

Rechterkant gaat vergelijkbaar. □

Tegengestelde spel

Definitie

Het tegengestelde spel van een spel $\boldsymbol{G}$ is

$$-\boldsymbol{G} := \left\{ -\mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} \;\middle|\; -\mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \right\},$$

waarbij $-\boldsymbol{S} = \{\, -\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{S} \,\}$ voor een spelverzameling $\boldsymbol{S}$.

Axioma:

"In het tegengestelde spel zijn de rollen van de spelers omgedraaid." (p. 60)

Tegengestelde spel

Definitie

Het tegengestelde spel van een spel $\boldsymbol{G}$ is

$$-\boldsymbol{G} := \left\{ -\mathcal{G}^{\boldsymbol{R}} \,\middle|\, -\mathcal{G}^{\boldsymbol{L}} \right\},$$

waarbij $-\boldsymbol{S} = \{ -\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{G} \in \boldsymbol{S} \}$ voor een spelverzameling $\boldsymbol{S}$.

Axioma:

"In het tegengestelde spel zijn de rollen van de spelers omgedraaid." (p. 60)

Opgave (4.10)

Laat zien: $-(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H}) = (-\boldsymbol{G}) + (-\boldsymbol{H})$ voor spellen $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$.

Bewijs.

Met inductie:

$$\begin{aligned}
-(G+H) &= \left\{ -(G+H)^R \;\middle|\; -(G+H)^L \right\} \\
&= \left\{ -(\mathcal{G}^R + H), -(G+\mathcal{H}^R) \;\middle|\; -(\mathcal{G}^L + H), -(G+\mathcal{H}^L) \right\} \\
&\overset{(ind)}{=} \Big\{ (-(\mathcal{G}^R)) + (-H), (-G) + (-(\mathcal{H}^R)) \quad \Big| \\
&\qquad\qquad (-(\mathcal{G}^L)) + (-H), (-G) + (-(\mathcal{H}^L)) \Big\} \\
&= \Big\{ (-\mathcal{G})^L + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^L \quad \Big| \\
&\qquad\qquad (-\mathcal{G})^R + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^R \Big\} \\
&= (-G) + (-H).
\end{aligned}$$

$\square$

Opgave (4.9)

Laat zien: $-(-\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \qquad (\forall \boldsymbol{G})$.

Bewijs.

Met inductie:

$$\begin{aligned} -(-\boldsymbol{G}) &= \left\{ -((-\boldsymbol{G})^{R}) \,\middle|\, -((-\boldsymbol{G})^{L}) \right\} \\ &= \left\{ -(-\mathcal{G}^{L}) \,\middle|\, -(-\mathcal{G}^{R}) \right\} \\ &\overset{(ind)}{=} \left\{ \mathcal{G}^{L} \,\middle|\, \mathcal{G}^{R} \right\} = \boldsymbol{G}. \end{aligned}$$

□

Motivatie definitie

Opgave (4.8)

$$o_L(-G) = \text{😁} \Leftrightarrow o_R(G) = \text{😁},$$

en

$$o_L(-G) = \text{☹} \Leftrightarrow o_R(G) = \text{☹}.$$

Motivatie definitie

Opgave (4.8)

$$o_L(-G) = \textcolor{blue}{😁} \Leftrightarrow o_R(G) = \textcolor{red}{😁},$$

en

$$o_L(-G) = \textcolor{blue}{☹} \Leftrightarrow o_R(G) = \textcolor{red}{☹}.$$

Probeer dit zelf.

Equivalentie van spellen

Definitie

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ spellen. Dan is $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \Leftrightarrow \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X}) \quad (\forall \boldsymbol{X})$.

Opgave (4.11)

De relatie $\sim$ is een equivalentierelatie.

Equivalentie van spellen

Definitie

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ spellen. Dan is $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \Leftrightarrow \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{X}) \quad (\forall \boldsymbol{X})$.

Opgave (4.11)

De relatie $\sim$ is een equivalentierelatie.

Reflexiviteit: $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \qquad (\forall \boldsymbol{X})$, dus $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G}$.

Definitie

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ spellen. Dan is $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \Leftrightarrow \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \quad (\forall \boldsymbol{X})$.

Opgave (4.11)

De relatie $\sim$ is een equivalentierelatie.

Reflexiviteit: $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \qquad (\forall \boldsymbol{X})$, dus $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G}$.

Symmetrie: Stel $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H}$. Dan geldt voor elk spel $\boldsymbol{X}$,

$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X})$ waardoor $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X})$, dus $\boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{G}$.

Definitie

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ spellen. Dan is $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \Leftrightarrow \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) \quad (\forall \boldsymbol{X})$.

Opgave (4.11)

De relatie $\sim$ is een equivalentierelatie.
Reflexiviteit: $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \qquad (\forall \boldsymbol{X})$, dus $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G}$.
Symmetrie: Stel $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H}$. Dan geldt voor elk spel $\boldsymbol{X}$,
$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X})$ waardoor $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X})$, dus $\boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{G}$.
Transitiviteit: Stel $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H}$ en $\boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{J}$. Dan geldt voor elk spel $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{X}),$$

dus $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{J}$.

$\mathcal{P}$-posities

Stelling (4.12)

Voor elk spel $\boldsymbol{G}$, *is* $\boldsymbol{G} \sim \mathbf{0} \iff \boldsymbol{G} \in \mathcal{P}$.

Stelling (4.12)

Voor elk spel $\boldsymbol{G}$, *is* $\boldsymbol{G} \sim 0 \iff \boldsymbol{G} \in \mathcal{P}$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: Als voor elk spel $\boldsymbol{X}$ geldt $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(0 + \boldsymbol{X})$, vul in $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + 0) = \boldsymbol{o}(0 + 0) = \mathcal{P}.$$

$\mathcal{P}$-posities

Stelling (4.12)

Voor elk spel $\boldsymbol{G}$, *is* $\boldsymbol{G} \sim \mathbf{0} \iff \boldsymbol{G} \in \mathcal{P}$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: Als voor elk spel $\boldsymbol{X}$ geldt $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(0 + \boldsymbol{X})$, vul in $\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + 0) = \boldsymbol{o}(0 + 0) = \mathcal{P}.$$

$\Leftarrow$: Stel $\boldsymbol{G} \in \mathcal{P}$.
Propositie (3.4) $\implies$ voor elk spel $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{G})$,
dus $\boldsymbol{G} \sim \mathbf{0}$. $\square$

Bestaan van inverses

Gevolg (4.15)

$\boldsymbol{G} + (-\boldsymbol{G}) \sim \mathbf{0}$.

Bewijs.

Door kopieergedrag kan de **2^e^** speler altijd winnen dus $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + (-\boldsymbol{G})) = \mathcal{P}$.
Stelling (4.12) $\implies$ $\boldsymbol{G} + (-\boldsymbol{G}) \sim \mathbf{0}$. $\square$

Spellen invariant onder equivalentie

Informeel: equivalente spellen zijn altijd 'vrij' inwisselbaar:

Stelling (4.16)

Voor alle spellen $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$, *geldt* $\quad \boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Spellen invariant onder equivalentie

Informeel: equivalente spellen zijn altijd 'vrij' inwisselbaar:

Stelling (4.16)

Voor alle spellen $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$*, geldt* $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: Stel $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H}$ en laat $\boldsymbol{X}$ een spel zijn. Dan is,

$$\boldsymbol{o}((\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{X})) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H} + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{X})) = \boldsymbol{o}((\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{X}).$$

Dus, $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Spellen invariant onder equivalentie

Informeel: equivalente spellen zijn altijd 'vrij' inwisselbaar:

Stelling (4.16)

Voor alle spellen $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$, *geldt* $\quad \boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Bewijs.

$\Rightarrow$: Stel $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H}$ en laat $\boldsymbol{X}$ een spel zijn. Dan is,

$$\boldsymbol{o}((\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{X}) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{X})) = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{H} + (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{X})) = \boldsymbol{o}((\boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}) + \boldsymbol{X}).$$

Dus, $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

$\Leftarrow$: Stel $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$. Dan: $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}$, vanwege $\Rightarrow$.
(4.15) $\implies$ $0 + \boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} + \boldsymbol{G}$ en $0 + \boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} + \boldsymbol{H}$.
Bovenstaand gecombineerd: $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{H}$. $\square$

Opgave (4.18)

Bewijs: als $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G}'$ en $\boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{H}'$, dan $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{G}' + \boldsymbol{H}'$.

Bewijs.

Gebruik **2**$\times$ (4.16) & commutativiteit. $\square$

Opgave (4.18)

Bewijs: als $\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{G'}$ en $\boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{H'}$, dan $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} \sim \boldsymbol{G'} + \boldsymbol{H'}$.

Bewijs.

Gebruik $\mathbf{2}\times$ (4.16) & commutativiteit. $\square$

Gevolg (4.19)

$\boldsymbol{G} \sim \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \sim \mathbf{0}$ *(*$\iff \boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{P}$*).*

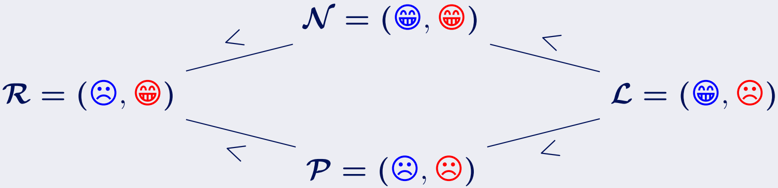
Bewijs.

$\Rightarrow$: Voeg $-\boldsymbol{H}$ toe; $\Leftarrow$: Voeg $\boldsymbol{H}$ toe. $\square$

Spellen vergelijken

Definitie

$G \geq H \iff \forall X\colon\ o(G+X) \geq o(H+X)$,
en $H \leq G \iff G \geq H$.



Aangezien $o(\,\cdot\,)$ een partiële ordening op $\{\,\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{N}\,\}$ is, is $\leq$ een partiële ordening op spellen (zie Simon's presentatie).

Alternatieve manieren om te vergelijken

Het is ondoenlijk om $\boldsymbol{G} \geq 0$ te controleren door $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o}(\boldsymbol{X})$ voor elk spel $\boldsymbol{X}$ te checken.

Alternatieve manieren om te vergelijken

Het is ondoenlijk om $G \geq 0$ te controleren door $o(G + X) \geq o(X)$ voor elk spel X te checken.

Stelling (4.21)

De volgende uitspraken zijn equivalent:

(1) $G \geq 0$,

(2) $o_R(G) = ☹$ *(oftewel* $G \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$*)*,

(3) $\forall X\colon\ o_R(G + X) \geq o_R(X)$,

(4) $\forall X\colon\ o_L(G + X) \geq o_L(X)$.

Alternatieve manieren om te vergelijken

Het is ondoenlijk om $\boldsymbol{G} \geq \mathbf{0}$ te controleren door $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o}(\boldsymbol{X})$ voor elk spel $\boldsymbol{X}$ te checken.

Stelling (4.21)

De volgende uitspraken zijn equivalent:

(1) $\boldsymbol{G} \geq \mathbf{0}$,

(2) $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) = ☹$ *(oftewel* $\boldsymbol{G} \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$*)*,

(3) $\forall \boldsymbol{X}\colon \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{X})$,

(4) $\forall \boldsymbol{X}\colon \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{X})$.

Bewijsschema: $(\mathbf{(3)}$ of $\mathbf{(4)}) \Rightarrow \mathbf{(2)} \Rightarrow \mathbf{(1)} \Rightarrow \mathbf{(3)} \wedge \mathbf{(4)}$. (anders dan boek)

Uitspraken: (1) $\boldsymbol{G} \geq 0$, (2) $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) = ☹$,
(3) $\forall \boldsymbol{X} : \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{X})$, (4) $\forall \boldsymbol{X} : \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{X})$.

Bewijs (4.21).

(3) ⇒ (2):

Neem $\boldsymbol{X} = 0$: $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) \geq \boldsymbol{o_R}(0) = ☹$, dus $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) = ☹$.

Uitspraken: (1) $G \geq 0$, (2) $o_R(G) = ☹$,
(3) $\forall X : o_R(G + X) \geq o_R(X)$, (4) $\forall X : o_L(G + X) \geq o_L(X)$.

Bewijs (4.21).

(3) ⇒ (2):

Neem $X = 0$: $o_R(G) \geq o_R(0) = ☹$, dus $o_R(G) = ☹$.

(4) ⇒ (2):

Neem $X = -G$: $☹ = o_L(0) \geq o_L(-G)$, dus $o_L(-G) = ☹$
oftewel $o_R(G) = ☹$ (uit 4.8).

Uitspraken: (1) $\boldsymbol{G} \geq 0$, (2) $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) =$ ☹,
(3) $\forall \boldsymbol{X} : \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{X})$, (4) $\forall \boldsymbol{X} : \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o_L}(\boldsymbol{X})$.

Bewijs (4.21).

(3) $\Rightarrow$ (2):

Neem $\boldsymbol{X} = 0$: $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) \geq \boldsymbol{o_R}(0) =$ ☹, dus $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) =$ ☹.

(4) $\Rightarrow$ (2):

Neem $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{G}$: ☹ $= \boldsymbol{o_L}(0) \geq \boldsymbol{o_L}(-\boldsymbol{G})$, dus $\boldsymbol{o_L}(-\boldsymbol{G}) =$ ☹
oftewel $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) =$ ☹ (uit 4.8).

(2) $\Rightarrow$ (1):

Stel $\boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G}) =$ ☹. Dan (3.5): $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{o}(\boldsymbol{X}) \quad (\forall \boldsymbol{X})$.

Uitspraken: (1) $G \geq 0$, (2) $o_R(G) = ☹$,
(3) $\forall X: o_R(G+X) \geq o_R(X)$, (4) $\forall X: o_L(G+X) \geq o_L(X)$.

Bewijs (4.21).

(3) ⇒ (2):
Neem $X = 0$: $o_R(G) \geq o_R(0) = ☹$, dus $o_R(G) = ☹$.

(4) ⇒ (2):
Neem $X = -G$: $☹ = o_L(0) \geq o_L(-G)$, dus $o_L(-G) = ☹$
oftewel $o_R(G) = ☹$ (uit 4.8).

(2) ⇒ (1):
Stel $o_R(G) = ☹$. Dan (3.5): $o(G+X) \geq o(X) \quad (\forall X)$.

(1) ⇔ (3) ∧ (4): Per definitie,

$$o(G+X) \geq o(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} o_L(G+X) \geq o_L(X), \text{ en} \\ o_R(G+X) \geq o_R(X). \end{array}$$

□

Stelling (4.23)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$ *spellen. Dan* $\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \geq \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Bewijs analoog aan bewijs (4.16).

Stelling (4.23)

Zij $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$ *spellen. Dan* $\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \geq \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Bewijs analoog aan bewijs (4.16).

Stelling (4.24)

Zij $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ *spellen. Dan* $\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) =$ ☹, *d.w.z.* Links *wint als* 2^e *speler in* $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}$.

Stelling (4.23)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{J}$ *spellen. Dan* $\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} + \boldsymbol{J} \geq \boldsymbol{H} + \boldsymbol{J}$.

Bewijs analoog aan bewijs (4.16).

Stelling (4.24)

Zij $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ *spellen. Dan* $\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) = ☹$, *d.w.z.* Links *wint als* 2^e *speler in* $\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}$.

Bewijs.

Neem $\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{H}$. Dan $\quad \boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{H} \iff \boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \geq 0 \iff \boldsymbol{o_R}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) = ☹$. $\square$

Conclusie

We hebben regels afgeleid om te bepalen of:

$\boldsymbol{G}$ beter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} > \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{L}$
$\boldsymbol{G}$ slechter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} < \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{R}$
$\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{H}$ equivalent	$(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) \sim 0$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{P}$
$\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ onvergelijkbaar	$\boldsymbol{G} \parallel \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{N}$

Conclusie

We hebben regels afgeleid om te bepalen of:

$\boldsymbol{G}$ beter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} > \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{L}$
$\boldsymbol{G}$ slechter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} < \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{R}$
$\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{H}$ equivalent	$(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) \sim 0$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{P}$
$\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ onvergelijkbaar	$\boldsymbol{G} \,\|\, \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{N}$

Notatie:

- $\boldsymbol{G} \,\|\, \boldsymbol{H}$ als niet $\boldsymbol{G} \leq \boldsymbol{H}$ en niet $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$.
- $\boldsymbol{G} \lhd\!\| \; \boldsymbol{H}$ als $\boldsymbol{G} \,\|\, \boldsymbol{H}$ of $\boldsymbol{G} < \boldsymbol{H}$.
- $\boldsymbol{G} \; \|\!\rhd \boldsymbol{H}$ als $\boldsymbol{H} \lhd\!\| \; \boldsymbol{G}$.

Conclusie

We hebben regels afgeleid om te bepalen of:

$\boldsymbol{G}$ beter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} > \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{L}$
$\boldsymbol{G}$ slechter dan $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} < \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{R}$
$\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{H}$ equivalent	$(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H}) \sim 0$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{P}$
$\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ onvergelijkbaar	$\boldsymbol{G} \parallel \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{G} - \boldsymbol{H} \in \mathcal{N}$

Notatie:

- $\boldsymbol{G} \parallel \boldsymbol{H}$ als niet $\boldsymbol{G} \leq \boldsymbol{H}$ en niet $\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{G}$.
- $\boldsymbol{G} \lhd\!\!\mid \boldsymbol{H}$ als $\boldsymbol{G} \parallel \boldsymbol{H}$ of $\boldsymbol{G} < \boldsymbol{H}$.
- $\boldsymbol{G} \mid\!\!\rhd \boldsymbol{H}$ als $\boldsymbol{H} \lhd\!\!\mid \boldsymbol{G}$.

En, voortaan zullen we '$\sim$' schrijven als '$=$': bekijk spellen modulo $\sim$.