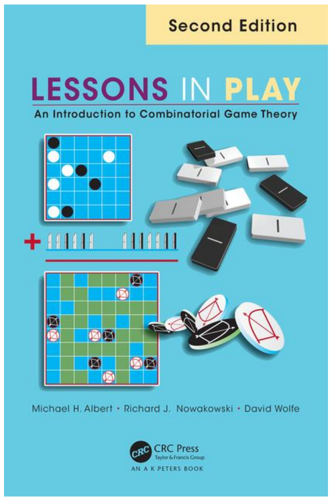
Combinatorial Game Theory

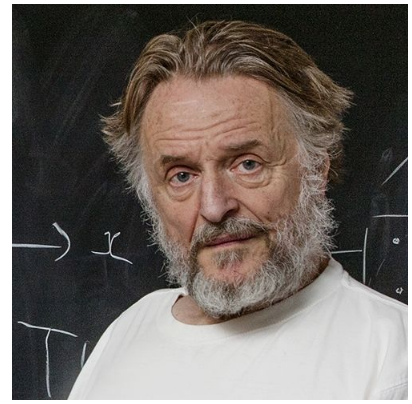


Walter Kosters

www.liacs.leidenuniv.nl/~kosterswa/AI/sur.pdf

Knuth en Conway

Donald E.(Ervin) Knuth
1938, US
NP; KMP
TeX
change-ringing; 3:16
The Art of Computer Programming

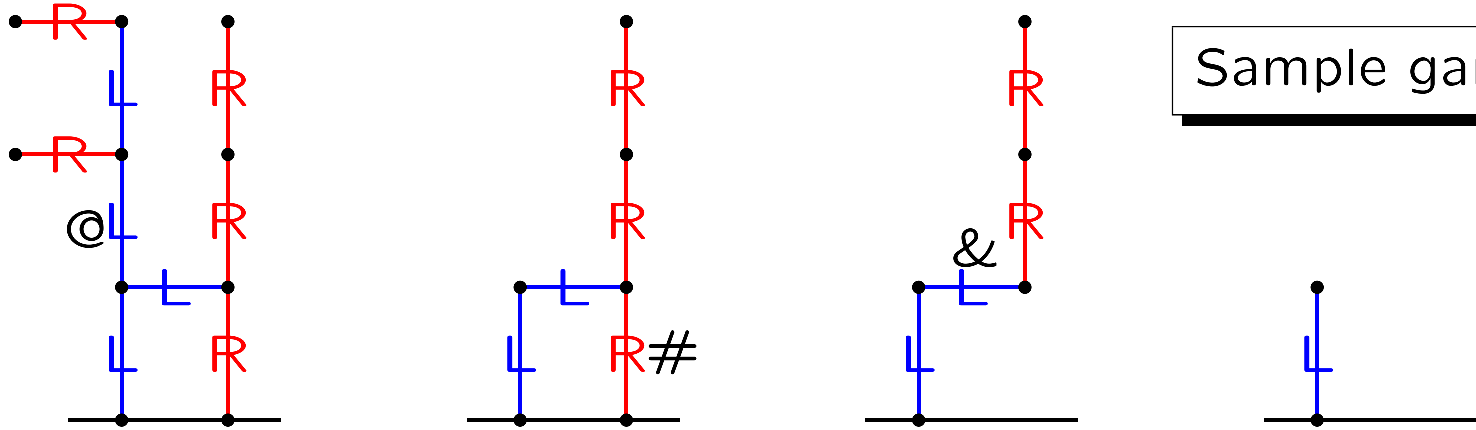


John H.(Horton) Conway
1937–2020, UK $\rightarrow$ US
Co_1, Co_2, Co_3
Doomsday algoritme
game of Life; Angel problem
Winning Ways for your Mathematical Plays

Surreal numbers

Bij het spel Hackenbush verwijderen de twee spelers Links = zij en Rechts = hij om de beurt respectievelijk een bLauw of een Rood streepje, waarna alle streepjes die niet meer met de grond verbonden zijn ook worden verwijderd. *Wie niet kan, heeft verloren!*

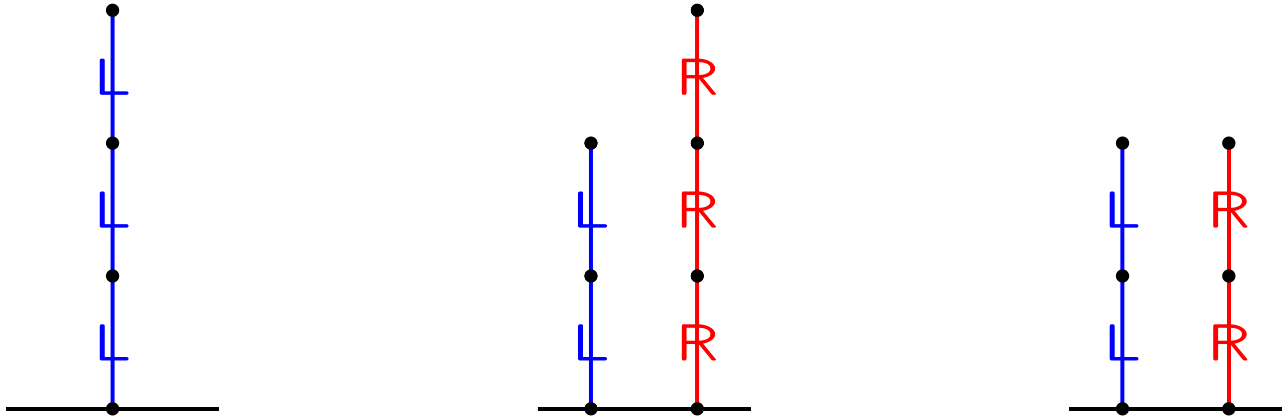
Sample game



Links kiest @, Rechts kiest # (dom), Links kiest & en wint

Overigens: hier kan Rechts altijd winnen, wie er ook begint!

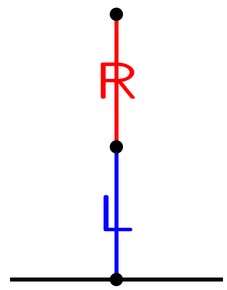
Wat is bij Hackenbush de waarde van een positie?



waarde 3 waarde $2-3=-1$ waarde $2-2=0$

Als de waarde positief (>0) is, *kan* Links altijd winnen (wie er ook begint; in het linker voorbeeld met voorsprong 3), als de waarde negatief (<0) is *kan* Rechts altijd winnen, en als de waarde 0 is verliest de beginspeler.

Maar wat is de waarde van deze positie?



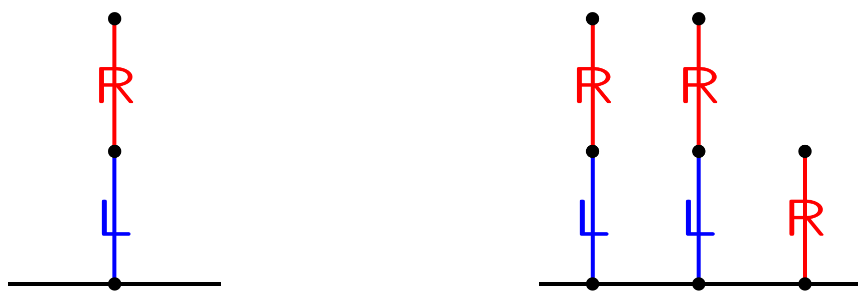
Als Links begint, wint hij meteen; als Rechts begint, kan Links nog een keer, en wint hij ook. Dus Links wint altijd. De waarde is daarom > 0.

Vraag: is de waarde gelijk aan 1?

Als de waarde links 1 zou zijn, zou de waarde van de rechter positie $1 + (-1) = 0$ moeten zijn, en zou de beginspeler hier moeten verliezen. Is dat zo?

Nee: het is zo dat als Links begint, Links verliest, en als Rechts begint Rechts ook kan winnen. Dus Rechts wint altijd (= kan altijd winnen), en daarom is de rechter positie < 0, en de linker tussen 0 en 1.

We noteren de waarde van de linker positie met $\{\,0 \mid 1\,\}$.



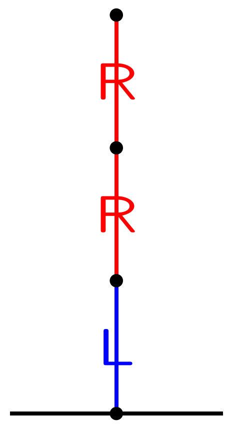
We merken op dat de rechter positie wél waarde 0 heeft: de beginspeler verliest. En dus geldt:

$$\{\,0 \mid 1\,\} + \{\,0 \mid 1\,\} + (-1) = 0,$$

en blijkbaar $\{\,0 \mid 1\,\} = 1/2$.

En: $0 = \{\mid\}$: beginspeler verliest (hij/zij kan niets).

We noteren de waarde van een positie waarin Links kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling L en Rechts kan spelen naar (waardes van) posities uit de verzameling R met $\{ L \mid R \}$. Een voorbeeld:



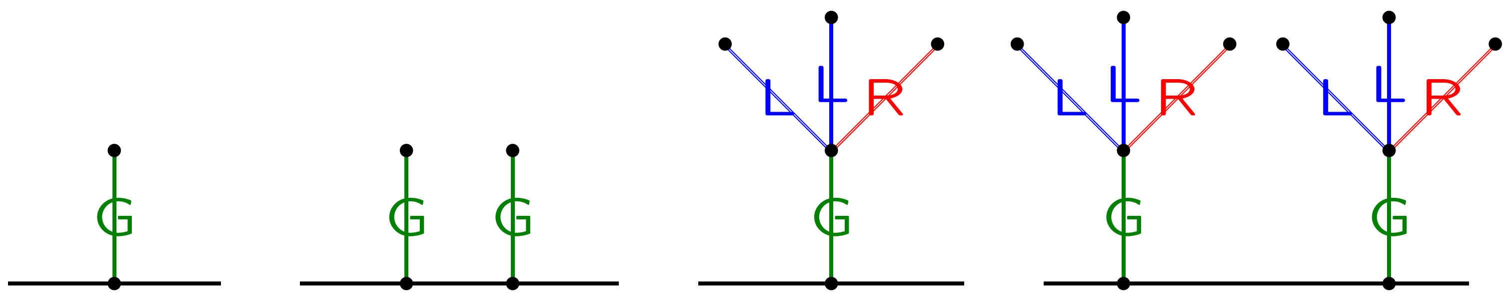
Links kan hier alleen naar — spelen.

$\downarrow$

De waarde is hier $\{ 0 \mid \frac{1}{2}, 1 \} = \frac{1}{4}$.

De waarde blijkt altijd het "eenvoudigste" getal dat tussen linker en rechter verzameling in zit.

Bij Red-Green-Blue-Hackenbush zijn er ook Groene takken, die door beide spelers verwijderd kunnen worden.



De eerste positie heeft waarde $* = \{\ 0 \mid 0\ \}$ omdat de beginnende speler kan winnen. (Een “Nim-stapel” met één lucifer.)

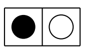
De tweede is $* + * = 0$ (beginspeler verliest).

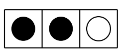
De derde wordt gewonnen door de beginspeler.

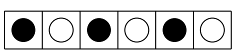
De vierde wordt gewonnen door Links (wie er ook begint), en is dus > 0.

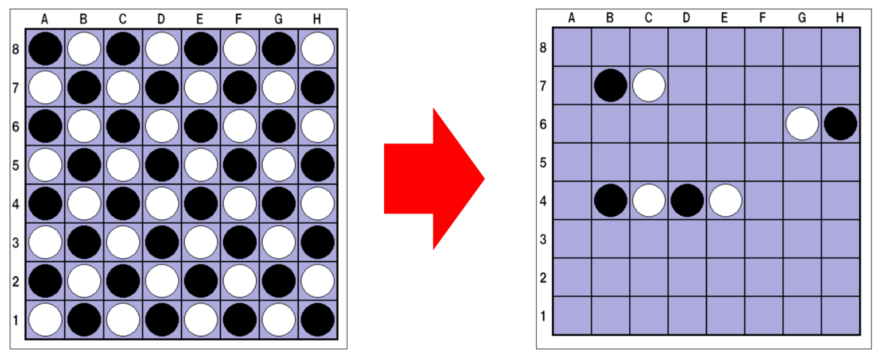
We spelen nu Clobber, op een m bij n bord, met witte (Rechts) en zwarte (Links) stenen. Een steen kan een direct horizontaal/verticaal aangrenzende steen van de andere kleur pakken = clobberen. Wie niet kan, verliest.

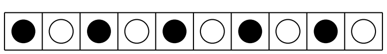
Enkele voorbeelden:

 $= \{ \, 0 \mid 0 \, \} = *$

 $= \{ \, 0 \mid * \, \} = \uparrow > 0$

 $= 0$



 $= \pm(\uparrow, \uparrow^{[2]} *, \{0 | \uparrow, \pm(*, \uparrow)\}, \{\Uparrow * | \downarrow, \pm(*, \uparrow)\})$