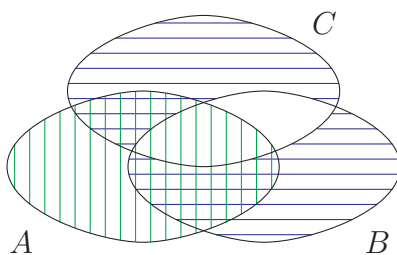


1a. ZIE jan 2009.

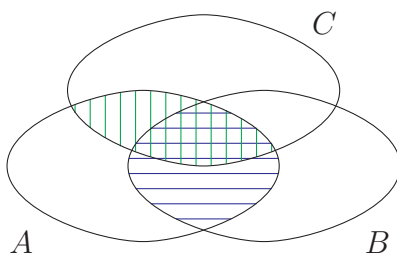
$\{3, 5, 7, 8, 11, 12\}$, de elementen die in een oneven aantal verzamelingen voorkomen. Herhaald de operatie \oplus toepassen; omdat \oplus associatief is, maakt het niet uit hoe we deze expressie uitrekenen: haakjes zijn overbodig.

$$\begin{aligned} \{3, 4, 5, 6\} \oplus \{4, 5, 6, 7, 8\} &= \{3, 7, 8\}, \\ \{3, 7, 8\} \oplus \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} &= \{3, 5, 6, 9, 10\}, \\ \text{en tenslotte } \{3, 5, 6, 9, 10\} \oplus \\ \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} &= \{3, 5, 7, 8, 11, 12\}. \end{aligned}$$

b. *Venn-diagram.* Arceer A vertikaal, en $B \oplus C$ horizontaal. $A \cap (B \oplus C)$ is het gedeelte dat dubbel is gearceerd.



Arceer $A \cap B$ horizontaal, $A \cap C$ vertikaal. Dan is $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$ het gedeelte dat precies één arcering heeft.



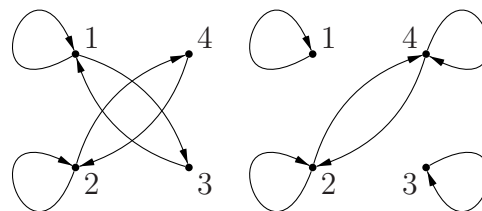
De gebieden corresponderend met de uitdrukkingen komen overeen. De gelijkheid geldt dus.

c. Neem $A = \{1\}$ en $B = C = \emptyset$. Dan is $A \cup (B \oplus C) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$, terwijl $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \{1\} \oplus \{1\} = \emptyset$. De uitdrukkingen zijn dus niet aan elkaar

gelijk. Alternatief. Kies $A = B = C$. Dan (links) $A \cup (A \oplus A) = A \cup \emptyset = A$ en (rechts) $(A \cup A) \oplus (A \cup A) = A \oplus A = \emptyset$. Deze zijn ongelijk als $A \neq \emptyset$. Kies nu een willekeurige niet-lege $A = B = C$.

Misverstanden. Een tegenvoorbeeld is een concreet rijtje verzamelingen A, B, C . Dus geen Venn-diagram. Het is wel zo dat als twee Venn-diagrammen verschillen er een tegenvoorbeeld mee gemaakt kan worden: plaats een element in een gebied dat in beide diagrammen verschilt.

2a. Twee stappen, resp. heen-en-weer.



b. De relatie R^2 verbindt alleen 1 en 3 met elkaar, en 2 en 4. Er zijn dus geen pijlen tussen een even en een oneven knoop. Dat geldt dan voor alle even machten van R : er zijn alleen paden van even lengte in de graaf van R van 1 naar 1, dus $(1, 1) \notin R^{101}$ terwijl duidelijk $(1, 1) \in R^{100}$.

Misverstanden. Het is niet ‘vanzelfsprekend’ dat $R^{100} \neq R^{101}$. Voor de relatie $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 3)\}$ geldt $R^{100} = R^{101} = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

c. Helemaal formeel kan het als volgt: $(x, y) \in R \circ R^{-1}$ desdals er een z bestaat met $(x, z) \in R$ en $(z, y) \in R^{-1}$ desdals er een z bestaat met $(x, z) \in R$ en $(y, z) \in R$.

Neem nu $x = y$. Er geldt $(x, x) \in R \circ R^{-1}$ [‘heeft een loop’] desdals er een z bestaat met $(x, z) \in R$ [x heeft een uitgaande pijl].

Als dit voor alle x moet gelden staat er $\text{id}_A \subseteq R \circ R^{-1}$ desdals R totaal.

3. ZIE *dec 2015*. ctrl-c, ctrl-v.

Basis. $a_0 = 1 = 2^0$, en $a_1 = 2 = 2^1$. Hier kloppen de opgegeven waarden met de formule.

Inductiestap. Inductiehypothese: Neem aan de formule $a_k = 2^k$ klopt voor alle $k \leq n$. We controleren de formule voor $n + 1$. We beginnen met het invullen van de definitie: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} = (3 - 1)2^n = 2^{n+1}$. Klopt.

4a. De relatie $R \subseteq A \times A$ heet reflexief als xRx voor alle $x \in A$; antisymmetrisch als uit xRy en yRx volgt dat $x = y$ (voor alle $x, y \in A$); transitief als uit xRy en yRz volgt dat xRz (voor alle $x, y, z \in A$);

b. ZIE *jan 2011*.

Wel reflexief: voor elk interval geldt $[a, b] \triangleleft [a, b]$, want $[a, b] \cup [a, b] = [a, b]$.

Wel antisymmetrisch: als $[a, b] \triangleleft [c, d]$ dan $a \leq c$ en $b \leq d$. Als ook $[c, d] \triangleleft [a, b]$ dan $c \leq a$ en $d \leq b$. Indien beide gelden moet dus $a = c$ en $b = d$, dus de intervallen $[a, b]$ en $[c, d]$ zijn gelijk.

Niet transitief: er geldt $[1, 2] \triangleleft [2, 3]$ en $[2, 3] \triangleleft [3, 4]$ maar niet $[1, 2] \triangleleft [3, 4]$ want $[1, 2] \cup [3, 4] \neq [1, 4]$ want er mist een stukje, de intervallen sluiten niet aan.

Misverstanden. De elementen x, y, z waarvoor de eigenschappen getest moeten worden zijn intervallen.

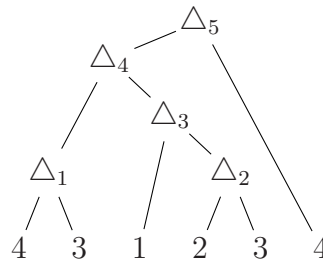
c. Bijvoorbeeld: interval $[a, b]$ ligt binnen interval $[c, d]$, dus als geldt $c \leq a \leq d \leq b$.

Er zijn ook vrij simpele mogelijkheden, zoals ‘begint eerder dan’: $[a, b] \leq [c, d]$ desdals $a < c$ of als $[a, b] = [c, d]$ (het eerste geeft direct antisymmetrie en transitiviteit, het laatste is nodig voor reflexiviteit).

5a. Schrijf de knopen van links naar rechts, en verbindt een interne knoop met de laat-

ste twee knopen zonder ouder; nummertjes voor de duidelijkheid:

$$4 \ 3 \ \triangle_1 \ 1 \ 2 \ 3 \ \triangle_2 \ \triangle_3 \ \triangle_4 \ 4 \ \triangle_5$$



Preorde: $\triangle_5 \ \triangle_4 \ \triangle_1 \ 4 \ 3 \ \triangle_3 \ 1 \ \triangle_2 \ 2 \ 3 \ 4$

b. ZIE *Opgave 47 bundel*.

$$f(\text{blad}) = 1; f(\text{knoop}) = f(\text{links}) + f(\text{rechts}).$$

6a. ZIE *mrt 2014*.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

Misverstanden. Het is niet de bedoeling om 4^4 echt uit te rekenen als je deze tabel maakt. Dat kan met modulo rekenen veel eenvoudiger!

b. Voor $x = 0 \pmod 5$ geldt natuurlijk dat $x^{23} + x^{17} + 2 = 2 \pmod 5$, en dus geldt dat $x^{23} + x^{17} + 2$ niet deelbaar is door 5 als x een vijfvoud is.

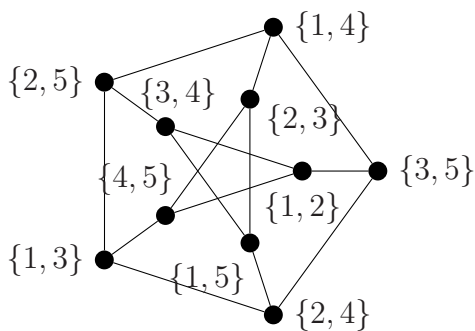
Voor elke andere waarde geldt dat $x^4 = 1 \pmod 5$, zie de tabel, dus mogen we bij de exponenten viertallen wegschrappen. $x^{23} + x^{17} = x^3 + x^1 \pmod 5$. Volgens de tabel hierboven is $x^3 + x$ gelijk aan respectievelijk 2, 0, 0, 3 (modulo 5) voor 1,2,3,4. Dat betekent dat $x^{23} + x^{17} + 2$ een vijfvoud is precies als x rest 4 heeft bij deling door 5.

Misverstanden. De exponent mogen we niet modulo 5 nemen (bij getallen modulo 5).

7a. De $KG_{n,1}$ heeft knopen corresponderend met verzamelingen met één element, $\{i\}$ met $1 \leq i \leq n$. Omdat $\{i\} \cap \{j\} = \emptyset$ voor $i \neq j$ is elk paar verbonden. Dus krijgen we een complete graaf, met n knopen en $\binom{n}{2}$ lijnen, het aantal manieren om twee knopen uit n te kiezen. (Dat is gelijk aan $\frac{n(n-1)}{2}$: er zijn n manieren om de eerste knoop te kiezen, maal $n-1$ manieren voor de tweede knoop. Deel door 2 omdat de lijnen symmetrisch zijn.)

b. ZIE feb 2011, mrt 2012, zonder uitwerkingen helaas.

Kies alle $\binom{5}{2} = 10$ verzamelingen van twee elementen uit $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als knopen. Aangezien het volgende onderdeel zegt dat we de Petersen graaf krijgen gebruiken we dat in de tekening. Als we beginnen met de ‘vijfster’ $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{5, 1\}$ kunnen de overige knopen er makkelijk bijgeplaatst. (Bijvoorbeeld: $\{1, 2\}$ heeft drie burens, de tweetallen uit $\{3, 4, 5\}$. Daarvan hebben we er al twee in de binnenste ster.)

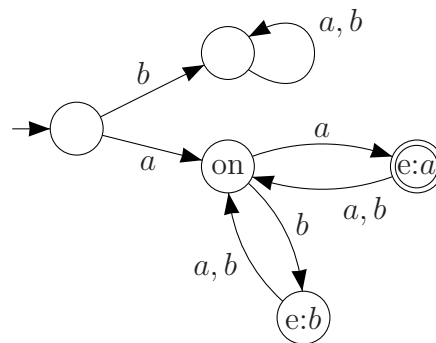


c. Het isomorfisme is een bijectie tussen de knopen van de Petersen-graaf van de opgave met die uit de zojuist getekende Kneser graaf $KG_{5,2}$ zodat de lijnen behouden blijven. Aangezien we de plaatjes denkbeeldig over elkaar kunnen leggen, krijgen we $0 \leftrightarrow \{3, 5\}, 1 \leftrightarrow \{1, 4\}, \dots, 9 \leftrightarrow \{1, 5\}$.

Misverstanden. Wanneer twee grafen even-

veel knopen en evenveel lijnen hebben, en alle knopen van gelijke graad zijn, zijn ze nog niet isomorf! Zie een voorbeeld in de slides.

8a. Belangrijk: de eerste letter a , de laatste letter a , de even/oneven lengte.



Misverstanden. Eindige automaten hebben graag een label met een letter op de pijlen. Het speciale pijltje om de begintoestand aan te geven heeft geen label.

b. $\{a\} \cdot \{aa, ab, ba, bb\}^* \cdot \{a\}$ of zo je wilt $\{a\} \cdot (\{a, b\} \cdot \{a, b\})^* \cdot \{a\}$.

Sommige mensen prefereren een andere notatie voor reguliere expressies, in het laatste geval krijgen we dan: $a((a+b)^2)^*a$.