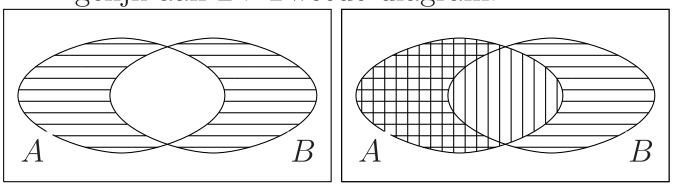
1) Per definitie is $A \oplus B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$, oftewel $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, dus alles precies in één van A of B. Eerste diagram.

$A \oplus A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. Lastig om aan te geven wat er precies aan de hand is: een enkele ovaal zonder arceringen (het gearceerde gebied is dan leeg).

Voor $A \oplus (B \oplus A)$ arceren we $B \oplus A = A \oplus B$ horizontaal en A vertikaal. Het enkelvoudig gearceerde gedeelte is het resultaat, dat is gelijk aan B. Tweede diagram.



De discussie hierboven heeft als schrijfwijzen met alleen de Boolese operaties: $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, $\varnothing$, respectievelijk B.

TIP. We zien graag een rechthoek als omkadering van het universum. Bij de Boolese schrijfwijze van $A \oplus (B \oplus A)$ kun je het gearceerde gebied in het diagram gebruiken; je hoeft niet herhaald $\oplus$ om te schrijven. De schrijfwijze $\varnothing$ is Boolese, net zoals 0 een optelling is.

2) Eerst volgen we de tip.

$$\begin{array}{rcl} (A^c \cap B) \cup (A \cap B) & = & \text{distributief} \\ (A^c \cup A) \cap B & = & \text{complement} \\ U \cap B & = & \text{eenheid} \\ B & & \end{array}$$

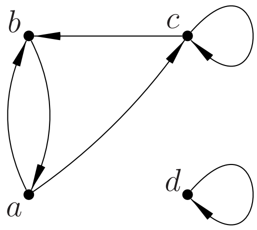
Nu min of meer hetzelfde herhalen.

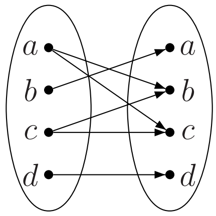
$$\begin{array}{rcl} (A \cap B^c) \cup ((A^c \cap B) \cup (A \cap B)) & = & \text{tip} \\ (A \cap B^c) \cup B & = & \text{distributief} \\ (A \cup B) \cap (B^c \cup B) & = & \text{complement} \\ (A \cup B) \cap U & = & \text{eenheid} \\ A \cup B & & \end{array}$$

[Schaum 1.38]

TIP. Niet oplossen met een Venn diagram. De operatie \ bestaat niet in de verzamelingenalgebra. Geef de gebruikte regels aan.

3) Gerichte graaf, resp. pijldiagram.





We bepalen eerst (bijvoorbeeld met behulp van de gerichte graaf).

$$R^2 = \{\ (a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c), (d,d)\ \};$$

Met als bijbehorende matrix:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4) (1) Als $R \subseteq A \times B$ injectief is, dan $R \circ R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$, volgens een karakterisatie uit het college.

Daarmee geldt $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{id}_A \circ R = R$, de inclusie van links naar rechts.

Alternatief. Rechtstreeks. Stel we hebben $(x,y) \in R \circ R^{-1} \circ R$. Dan moeten er u, v zijn zó dat $(x,u) \in R$, $(u,v) \in R^{-1}$ en $(v,y) \in R$. Dus geldt er dat zowel (x,u) en (v,u) tot R behoren. Omdat R injectief is moet $x = v$ en daarmee $(x,y) = (v,y) \in R$.

(2) Omgekeerd laten we zien dat een element $(x,y) \in R$ ook in $R \circ R^{-1} \circ R$ gevonden kan worden. Natuurlijk geldt $(y,x) \in R^{-1}$, en dus laat de reeks (x,y), (y,x), (x,y) zien dat $(x,y) \in R \circ R^{-1} \circ R$.

(3) Het voorbeeld kan natuurlijk alleen gevonden worden als R niet injectief is.

Als $R = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$ dan $(1,2)$ in $R \circ R^{-1} \circ R$ maar niet in R.

TIP. R is niet per sé een functie. Het is in je argumentatie essentieel dat R injectief is.

5) Reflexief. Ja, want $a \prec a$ omdat $a = a^1$ (voor elke $a \in \mathbb{N}^+$).

Symmetrisch. Nee, want $2 \prec 4$ terwijl $4 \not\prec 2$. Dus er geldt niet voor elke $a, b \in \mathbb{N}^+$ dat $a \prec b$ desdals $b \prec a$.

Antisymmetrisch. Ja, want als $a \prec b$ en $b \prec a$ dan $a = b$ (voor elke $a, b \in \mathbb{N}^+$) Immers stel $b = a^n$ en $a = b^m$ dan moet $a = b^m = (a^n)^m = a^{mn}$. Dat kan alleen als $a = b = 1$ of als $mn = 1$. In dat laatste geval moet, omdat m, n geheel zijn, $m = n = 1$ en daarmee $b = a^1 = a$.

Transitief. Ja, want als $a \prec b$ en $b \prec c$ dan $a \prec c$ (voor elke $a, b, c \in \mathbb{N}^+$). Immers, als $b = a^n$ en $c = b^m$ (voor $m, n \in \mathbb{N}$) dan $c = b^m = (a^n)^m = a^{mn}$.

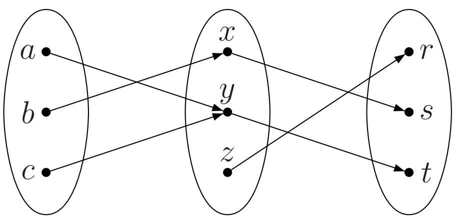
Daarmee geen equivalentierelatie (R,S,T), maar wel een partiële ordening (R,A,T).

TIP. De waarde n is geen vaste constante, maar verschilt bij verschillende paren $a \prec a^n$. Alleen Ja, Nee, Ja, Ja zeggen levert geen punten (kans één op zestien). Niet symmetrisch is nog niet antisymmetrisch.

6) g na f (functievolgorde) $g \circ f = \{(a,t),(b,s),(c,t)\}$.

Bereik van $f = \{x, y\}$, bereik van $g = \{s, t, r\}$, en bereik van $g \circ f = \{s, t\}$.

Plaatje wordt niet gevraagd, maar is wel duidelijk.



[Schaum 3.3]

7) Dit is een rekenkundige rij: (eerste+laatste) maal aantal termen, gedeeld door twee.

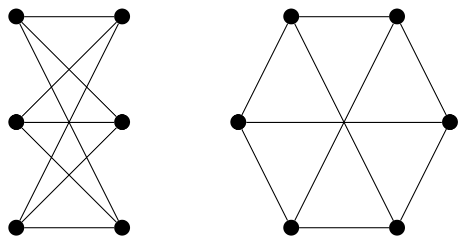
$$\frac{(1 + (3n-2)) \cdot n}{2} = \frac{(3n-1)n}{2}.$$

Met het opschrijven van de getallen $1, 5, 12, 22, \ldots$ kom je een eind, maar niet in de buurt van alle $n \geq 1$.

TIP. Dit is een som over reeksen. Geen inductiesom.

8) De graaf $K_{3,3}$ (de complete bipartiete graaf op $3+3$ knopen) heeft $3 + 3 = 6$ knopen en $3 \cdot 3 = 9$ lijnen.

Omdat de graaf bipartiet is zijn er geen cykels van oneven lengte.



TIP. Leg uit waarom er geen driehoeken zijn in de graaf.

9) Stel er zijn twee verschillende paden π_1 en π_2 van u naar v. Kijk naar de eerste knoop waar de paden niet meer dezelfde lijn gaan volgen. Noem deze knoop x. Volg nu vanuit x het pad π_2 verder tot de eerstvolgende knoop op π_2 die ook op π_1 ligt. Noem die knoop y. De twee paden van x naar y via π_1 en π_2 hebben behalve x en y geen knopen gemeenschappelijk, en dus is het pad van x naar y via π_1 en terug naar x via π_2 een cykel. [Schaum 8.37]

TIP. Een plaatje van een simpele graaf (driehoek of ruit) is geen bewijs maar een voorbeeld. Essentieel is dat de twee simpele paden elkaar kunnen overlappen.

10) *Basis.* De complete graaf op 1 knoop heeft inderdaad $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ lijnen.

Inductiehypothese. De complete graaf op n knopen heeft $\frac{n(n-1)}{2}$ lijnen.

Inductiestap. Te bewijzen: de complete graaf K_{n+1} op $n+1$ knopen heeft $\frac{(n+1)n}{2}$ lijnen.

Neem één knoop van K_{n+1} apart. De resterende knopen vormen een complete graaf op n knopen, en hebben dus volgens de hypothese $\frac{n(n-1)}{2}$ lijnen. Vanuit de apart gehouden knoop lopen er nog n lijnen naar de overige knopen. Totaal dus $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$ lijnen.

TIP. Dit is een eigenschap van de graaf K_n. Het bewijs kan niet kloppen zonder daar naar te verwijzen. Bijvoorbeeld $\ell(1) = 0$ volgens de formule maar die waarde klopt ook in K_1. Niet elk inductiebewijs gaat over sommaties!