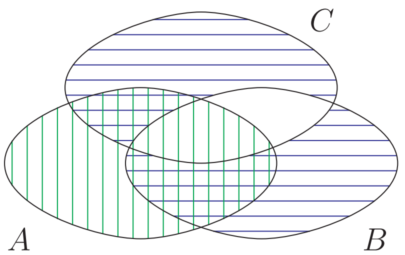
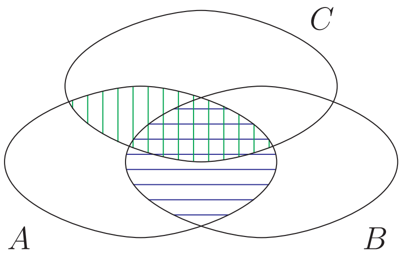
De nummers zijn die van de Leidse tussentoets, resp. de Haagse eindtoets.

1:1 Dit is Opgave 7d van de bundel, die geen oplossing heeft bij de uitwerkingen.



Arceer $B \oplus C$ horizontaal, A vertikaal. Dan is $A \cap (B \oplus C)$ het gedeelte dat dubbel gearceerd is.



Arceer $A \cap B$ horizontaal, $A \cap C$ vertikaal. Dan is $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$ het gedeelte dat precies één arcering heeft.

De twee gebieden komen overeen, de uitdrukking klopt dus.

2:2 Als A en B eindige verzamelingen zijn, dan geldt: (Cartesisch product) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ en (machtsverzameling) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

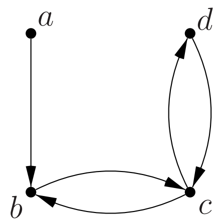
De verzameling bevat paren, waarvan het eerste element een $+$ of $-$ is, het tweede element een deelverzameling van $\{1, 2, 3\}$. Dat zijn $2 \cdot 2^3 = 16$ elementen. Bijvoorbeeld $(+, \varnothing)$, $(-, \{1, 2, 3\})$, en $(+, \{1\})$.

3:3 We kunnen niet meteen de gelijkheid in de verzamelingenalgebra aantonen omdat de operatie $\setminus$ daarin niet bestaat. Daarom herschrijven we dit eerst met doorsnede en complement.

De beginexpressie heeft (i) een complement over een expressie, en (ii) zowel $\cap$ als $\cup$. Als er geen slimmere ideeen zijn proberen we DeMorgan of distributiviteit. Hier zijn ze allebei nodig.

$$\begin{aligned}
&(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \\
&\text{distribut} \\
&(A \cap (A \cap B)^c) \cup (B \cap (A \cap B)^c) = \\
&\text{DeMorgan}\times 2 \\
&(A \cap (A^c \cup B^c)) \cup (B \cap (A^c \cup B^c)) = \\
&\text{distribut}\times 2 \\
&((A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)) = \\
&\text{complement}\times 2 \\
&(\varnothing \cup (A \cap B^c)) \cup ((B \cap A^c) \cup \varnothing) = \\
&\text{nul-element}\times 2 \\
&(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)
\end{aligned}$$

4:4 Een plaatje kan soms helpen.



R^2 is de 'tweestapsrelatie' $\{(a, c), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b), (d, d)\}$.

R^3 is de 'driestapsrelatie' $\{(a, b), (a, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$.

De transitieve afsluiting bestaat uit alle begin- en eindpunten van gerichte paden met lengte ≥ 1 in de graaf van R. We kunnen overal komen behalve in a, ongeacht het beginpunt. Daarmee zijn er $4 \cdot 3 = 12$ paren. Die kun je netjes uitschrijven, maar ook noteren met $\{a, b, c, d\} \times \{b, c, d\}$.

5:- Reflexief (aRa, voor elke a) Nee, dat geldt zelfs nooit.
Symmetrisch (als aRb dan bRa, voor elke a, b) Nee: $1 < 2$ maar $2 \not< 1$. Het geldt zelfs

nergens:
Antisymmetrisch (als aRb dan niet bRa, tenzij $a = b$, voor elke a, b) Ja!
Transitief (als aRb en bRc dan aRc, voor elke a, b, c) Ja.

6:5 Stel $(g \circ f)$ beeldt x en y op dezelfde waarde af: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, maw. $g(f(x)) = g(f(y))$, omdat g injectief is moet $f(x) = f(y)$, omdat op zijn beurt f injectief is geldt $x = y$.
Daarmee is de samenstelling injectief.

7:- Als $S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k$ dan zijn bij $3S_n$ alle machten één hoger: $3S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} n3^k$. Als we $3S_n - S_n$ berekenen houden we alleen de buitenste termen over $2S_n = 3^{n+1} - 1$.

Dan weten we $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

8:6 Bij een Euler trail zijn alle knopen van even graad. Voor een Euler pad mogen er twee knopen van oneven graad zijn (daar beginnen en eindigen we dan).

K_5 heeft vijf knopen van graaf vier. Daarom moet er een Euler trail zijn.

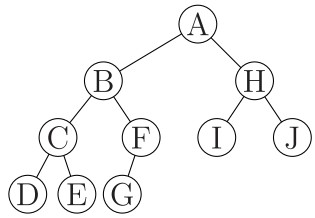
$K_{2,3}$ heeft twee knopen van graad drie en drie knopen van graaf twee. Daarmee bestaat er geen Euler trail, maar wel een Euler pad: je kunt beginnen en eindigen in de twee knopen met oneven graad.

$K_{3,3}$ heeft zes knopen van graad drie. Geen Euler pad, noch trail.

9:7 Een topologische sortering (=ordening) vind je door een bron te nemen, die op te schrijven, en dan bron met zijn uitgaande pijlen te verwijderen. Herhaal dit tot er geen knopen meer over zijn.

Bijvoorbeeld: x, u, z, y, r, s, t, w.

-:8 Bij een volledige=complete boom ligt de vorm van de boom vast als we het aantal knopen weten. De knopen worden dan volgens de preordening in de boom gezet.



-:9 Nee de argumentatie is niet geldig.

p Kortjakje verdient geld
q Kortjakje is ziek
r Kortjakje werkt

Stel nu dat p niet waar is, maar q, r beide wel. Dan gelden de premissen $p \vee q$, $q \vee r$, r, maar niet de conclusie p. (Als je ziek bent en toch werkt verdien je hier kennelijk geen geld.)

-:10 In Leiden was inductie nog niet behandeld, vandaar.

Basis, $n = 0$: links $\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3^0 = 2$; rechts $3^{n+1} - 1 = 3^1 - 1 = 2$. Klopt.

Inductieveronderstelling: $\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^k = 3^{n+1} - 1$. We laten zien dat we hieruit dezelfde bewering, maar voor $n+1$ kunnen bewijzen, dus $\sum_{k=0}^{n+1} 2 \cdot 3^k = 3^{n+2} - 1$.

We schrijven de grootste term apart:
$\sum_{k=0}^{n+1} 2 \cdot 3^k = 2 \cdot 3^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^k = \ldots$

De laatste sommatie is bekend, volgens de inductieveronderstelling, dus is dit gelijk aan
$= 2 \cdot 3^{n+1} + 3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^{n+1} - 1 = 3^{n+2} - 1$.
Klaar.

HJH nov '14