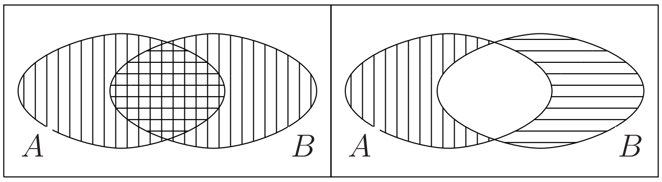
1a. $A \backslash B = A \cap B^c$, alles in A maar niet in B.



b. Linker plaatje: $A \cup B$ (verticaal); $A \cap B$ (horizontaal). $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ bestaat uit enkele arcering verticaal.

Rechter plaatje: $A \backslash B$ (verticaal); $B \backslash A$ (horizontaal). $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ is het gearceerde gedeelte.

De aangegeven gedeeltes links en rechts komen overeen, en dus $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Misverstanden. Geef aan wat de gearceerde gedeeltes weergeven, en om welke gebieden onze aandacht uitgaat. Trek altijd een conclusie.

c.

$$\begin{array}{rcl} (A \cup B) \backslash A & = & \text{omschrijven} \\ (A \cup B) \cap A^c & = & \text{distributief} \\ (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) & = & \text{complement} \\ \varnothing \cup (B \cap A^c) & = & \text{nul} \\ B \cap A^c & = & \text{omschrijven} \\ B \backslash A & & \end{array}$$

Misverstanden. De verzamelingenalgebra gaat over $\cup, \cap, c$. Daarom moeten andere operaties anders uitgedrukt worden. De gelijkheid $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ is leuk gevonden, maar niet wat we zoeken.

2a. $\mathcal{P}(A \times B)$ resp. $\mathcal{P}(C^*)$.

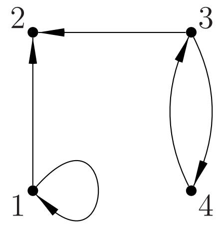
Uitleg. Per definitie: deelverzameling van $X \iff$ element van $\mathcal{P}(X)$.

Een relatie van A naar B is een deelverzameling van het Cartesisch product $A \times B$, en dus een element van de machtsverzameling $\mathcal{P}(A \times B)$.

Een taal over C is een deelverzameling van C^*, en dus een element van $\mathcal{P}(C^*)$.

Deze opgave is een soort strafwerk, komt rechtstreeks uit de laatste toets. Jammergenoeg ...

3a.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. $R^2 = \{\ (1,1), (1,2), (3,3), (4,2), (4,4)\ \}$; $R \circ R^{-1} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (4,4)\}$.

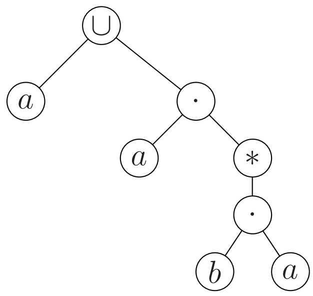
c. R is niet totaal: er is geen element (x, y) met $x = 2$ (maw. er vertrekt geen pijl uit 2; er is geen 1 in de tweede rij).

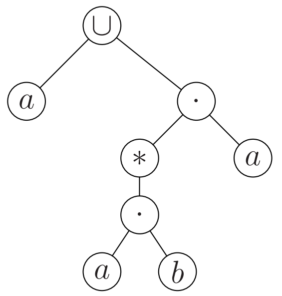
R is wel surjectief: voor elke y is er een element (x, y) (maw. in elk punt komt een pijl aan; elke kolom bevat een 1).

R is niet injectief: er zijn twee elementen (x, y) met $y = 2$ (maw. er komen meerdere pijlen aan in 2).

4a. *december 2006*

De operator met de laagste prioriteit zien we in de wortel, boom links.





Misverstanden. Let op de ariteit van de operatoren, het aantal kinderen in de boom. De operatie ster is unair en heeft één kind. Als je niet zeker bent van je boom kun je kijken welke notatie omgekeerd bij jouw boom zou horen. Klopt dat met de opgave?

b. Werk stap voor stap de operator mir naar binnen toe, volgens de definitie. Voor alle letters geldt $\mathrm{mir}(a) = a$, dus dat is ook voor letter b het geval.

$\mathrm{mir}(a \cup a \cdot (b \cdot a)*) = \mathrm{mir}(a) \cup \mathrm{mir}(a \cdot (b \cdot a)*) = a \cup \mathrm{mir}((b \cdot a)*) \cdot \mathrm{mir}(a) = a \cup \mathrm{mir}(b \cdot a) * \cdot a = a \cup (\mathrm{mir}(a) \cdot \mathrm{mir}(b)) * \cdot a = a \cup (a \cdot b) * \cdot a$.

De boom staat hierboven, rechts.

c. In het algemeen laat mir de expressie ongewijzigd. Alleen bij $\cdot$ worden linker en rechter argument verwisseld. Datzelfde moet dus bij de bomen gebeuren. Verwissel bij elke $\cdot$ linker en rechter subboom.

5a. *automaat uit dictaat, zie ook slides.*

$\mathrm{val}(xa) = 2 \cdot \mathrm{val}(x) + a$.
Hierbij is $a \in \{0, 1\}$ links een symbool, en rechts een getal, maar die twee rollen kan a aannemen.

Uitleg. Door een a achter de string te plaatsen worden de bits twee keer zoveel waard.

Misverstanden. val is een functie gedefinieerd op strings, zegt de opgave expliciet.

b. Dit was geen klassieke inductie. Wat bewezen had kunnen worden was: na het lezen van $x \in \{a, b\}^*$ is de automaat in toestand $\mathrm{val}(w) \bmod 3$.

Basis, dat klopt voor $w = \lambda$, aangezien $\mathrm{val}(\lambda) = 0$, gelijk aan de begintoestand van $\mathcal{A}$.

Inductie. Als het klopt voor w, met toestand $q \equiv \mathrm{val}(w) \bmod 3$ bereikt, dan klopt het vervolgens voor $w0$ en $w1$ omdat $\mathrm{val}(wa) = 2 \cdot \mathrm{val}(w) + a \equiv 2q + a \bmod 3$ precies de toestand is die via a vanuit q bereikt wordt. De pijlen zijn van de vorm $(q, a, 2q + a \bmod 3)$.

6a.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

Daar lezen we bijvoorbeeld dat als x niet deelbaar is door 5 dat dan x^4 rest 1 heeft bij deling door 5.

Misverstanden. Om 4^4 uit te rekenen modulo 5 is geen rekenapparaat nodig. $4^2 = 16 \equiv 1 \bmod 5$, dus $4^3 = 4^2 \cdot 4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 4 \bmod 5$, en tenslotte $4^4 = 4^3 \cdot 4 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 5$. Wie eerst $4^4 = 256$ uitrekent is eigenlijk door de mand gevallen, qua modulo.

Helemaal snel: $4 \equiv -1 \bmod 5$, dus $4^4 \equiv -1^4 \equiv 1 \bmod 5$.

b. Een getal x is deelbaar door n als dat getal rest nul heeft bij deling, dus $x \equiv 0 \bmod n$.

Als $x \equiv 0 \bmod 5$ dan geldt dat $x^{23} + x^{16} \equiv 0 + 0 \equiv 0$, en dus is die som deelbaar door 5. Dit geldt voor de natuurlijke getallen $0, 5, 10, 15, \ldots$

Voor andere getallen x (dus $x \not\equiv 0 \bmod 5$) geldt dat $x^4 \equiv 1 \bmod 5$, zie de tabel uit **a.** Dus $x^{23} \equiv (x^4)^5 x^3 \equiv 1^5 x^3 \equiv x^3 \bmod 5$, en op dezelfde manier $x^{16} \equiv 1 \bmod 5$.

Wanneer geldt $x^{23} + x^{16} \equiv x^3 + 1 \equiv 0 \bmod 5$? Dat geldt als $x^3 \equiv -1 \equiv 4 \bmod 5$. Dat geldt als $x \equiv 4 \bmod 5$, zie tabel.
Dus voor de getallen $4, 9, 14, 19, \ldots$.

Misverstanden. De exponent mogen we *niet* modulo 5 nemen (bij getallen modulo 5). Onderdeel **a.** laat juist zien dat we de exponent modulo 4 moeten doen.

7a. De (ongerichte) graaf is samenhangend als er tussen elk tweetal punten een pad is, of, er is een pad dat alle punten aandoet.

Een samenhangende graaf is een boom als de graaf geen cykels bevat.

Misverstanden. Wees precies. niet goed is 'als er een lijn is tussen elk tweetal knopen' (lijkt me een volledige graaf) 'als elke knoop verbonden is met een lijn' (lijkt aan te geven dat graden niet nul mogen zijn).

b. Het aantal lijnen e in een samenhangende graaf met n knopen voldoet aan $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Het minimum wordt aangenomen bij een boom, het maximum bij een volledige graaf.

Misverstanden. Inderdaad, $\sum_{k=1}^{n-1} k$ is het aantal lijnen van een volledige graaf. Bij dit college zou je ook geleerd moeten hebben wat uit die formule komt.

c. Laat G een samenhangende graaf zijn met lijn e, waarbij verwijderen van e weer een samenhangende graaf geeft. Laat x, y de eindpunten van e zijn. Omdat $G - e$ samenhangend is moet er in $G - e$ een pad zijn van x naar y, dat pad bevat e niet. Als we e aan het pad toevoegen ontstaat een cykel van x naar y en terug naar x, zoals de bewering zegt.

Misverstanden. Leg duidelijk uit wáár de cykel gevonden wordt. Teveel mensen zeggen eigenlijk gewoon de bewering uit de opgave, maar in meer woorden.

8a. Elementen van K^2 zijn van de vorm xy met $x, y \in K$. De lengte van zo'n string is even omdat de som van twee even getallen weer even is. De laatste letter van xy is de laatste letter van y (omdat y niet de lege string is) en is dus een b. Daarom voldoet xy aan de eisen, en behoort tot K. Dus $K \subseteq K^2$.

De inclusie is echt (strict). De string $ab \notin K^2$ omdat zij geen twee b's bevat, maar behoort wel tot K.

Misverstanden. K is een taal, dus K^2 ook. Deze ontstaat door twee strings van K achter elkaar te plaatsen. Niet noodzakelijk twee keer dezelfde string. De lengte van strings in K^2 hoeft zeker geen kwadraat te zijn!

b. Maak eerste een expressie voor een even aantal letters, bijvoorbeeld $\{aa, ab, ba, bb\}^*$. Deze notatie is 'verzameling gebaseerd'; dat is een kwestie van smaak, ook goed zou zijn `(aa+ab+ba+bb)*`.

Voor de woorden uit de taal moeten er tenminste twee letters bij, om de laatste letter een b te kunnen laten zijn:
$\{aa, ab, ba, bb\}^* \cdot \{ab, bb\}$.

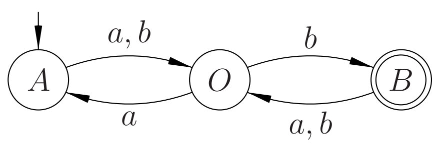
Opgelet $*$ is een unaire operator. De binaire concatenatie $\cdot$ heb ik hier wel geschreven, maar wordt vaak weggelaten.

c. De automaat kan bijhouden of de lengte van het gelezen woord oneven dan wel even is, en in het laatste geval of de laatste letter een a dan wel een b was.
O = oneven positie; A = even positie, laatste letter a; B = even positie, laatste letter b.

In de begintoestand is de lengte even (lege woord gelezen) maar is er geen laatst gelezen letter. Je kunt daar een apart toestand voor invoeren, maar het maakt niet uit of we aannemen dat we nu a gelezen hebben, en dus in toestand a beginnen.

De pijlen (overgangen) gelabeld a, b zijn eigenlijk twee overgangen, voor de twee letters, maar gebruikelijke notatie in dit college.

De automaat is deterministisch: in elke toestand is er voor elke letter precies één mogelijke actie.



HJH feb'13