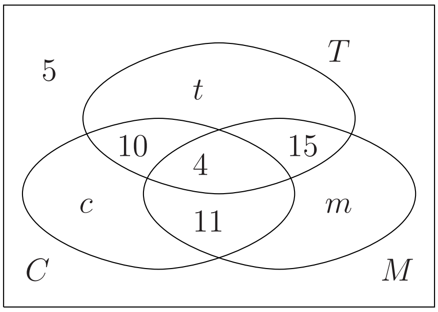
1) *opm.* Om $L = R$ aan te tonen met redeneringen gebruik je *twee* inclusies: als $x \in L$, dan $x \in R$ en omgekeerd.

$A \cap (A \cup B) \subseteq A$. Als $x \in A \cap (A \cup B)$ dan $x \in A$ (én $x \in A \cup B$, maar dat gebruiken we hier niet).

$A \subseteq A \cap (A \cup B)$. Als $x \in A$ dan ook $x \in A \cup B$, en dus $x \in A \cap (A \cup B)$ omdat x in beide verzamelingen zit.

2) De waardes c, m, t in de overblijvende gebieden (leest één krant) kunnen vrijelijk worden ingevuld. We kunnen daarom niet de inclusie-exclusie formule invullen.



opm. Er is nog een reden: het is niet duidelijk wat "read Mirror and Times" precies betekent. Lezen die mensen ook Citizen?

opm. Vergeet de 5 mensen die geen van de drie bladen lezen niet.

3) $\mathcal{P}(A \times B)$ resp. $\mathcal{P}(B^*)$. Dat is alles.

opm. M A C H T S V E R Z A M E L I N G .

Per definitie: deelverzameling van $X \iff$ element van $\mathcal{P}(X)$.

Een relatie van A naar B is een deelverzameling van het Cartesisch product $A \times B$, en dus een element van de machtsverzameling $\mathcal{P}(A \times B)$.

Een taal over B is een deelverzameling van B^*, en dus een element van $\mathcal{P}(B^*)$.

4) Associatief: we mogen de haakjes verschuiven. Dat geldt voor 'gewone' concatenatie.

We hebben $x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (z \cdot y) = (z \cdot y) \cdot x$. Maar ook $(x \diamond y) \diamond z = z \cdot (x \diamond y) = z \cdot (y \cdot x)$, en die waarden zijn gelijk.

In de opgave staan geen haakjes. Omdat de operatie associatief is, maakt dat niet uit. $aa \diamond babb \diamond b = b \cdot babb \cdot aa = bbabbaa$.

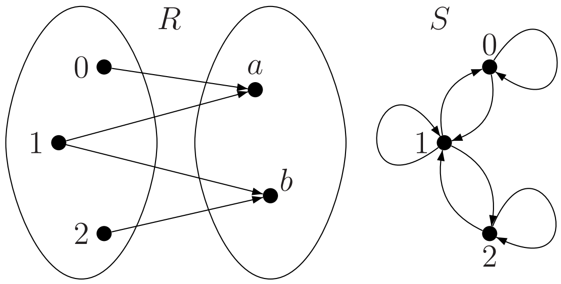
5) *opm.* Eerst maar eens R^2 uitrekenen.

$R^2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$. Dan kennelijk $(2,3), (3,4) \in R^2$, maar $(2,4) \notin R^2$. Dus R^2 is niet transitief.

opm. R^2 is transitief als $R^4 \subseteq R^2$.

6) Gegeven R is totaal: $\mathrm{dom}(R) = A$.

opm. Om in de stemming te komen eerst een voorbeeld. $R \subseteq \{0,1,2\} \times \{a,b\}$, zie pijldiagram (links). Dan $S = R \circ R^{-1} \subseteq \{0,1,2\}^2$ (rechts).



Reflexief. Als $x \in A$ is er een $z \in B$ zodat $(x,z) \in R$ vanwege totaliteit. Dus $(z,x) \in R^{-1}$ en $(x,x) \in R \circ R^{-1}$.

Symmetrie. Als $x, y \in R \circ R^{-1}$ moet er een z zijn zodat $(x,z) \in R$ en $(z,y) \in R^{-1}$. Draai deze pijlen om: $(y,z) \in R$ en $(z,x) \in R^{-1}$, samengesteld $(y,x) \in R \circ R^{-1}$.

Niet altijd transitief. Dat voorbeeld heb ik niet voor niets getekend.

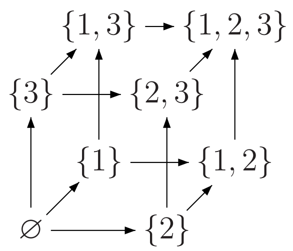
7) De functie is surjectief: voor elk getal in $\mathbb{N}$ is er een binaire representatie. De functie is niet injectief, we kunnen nullen vooraan schrijven zonder dat de waarde verandert.

opm. Die nullen mogen meedoen: het domein van de functie is gegeven als $\{0,1\}^*$.

8) Er zijn acht knopen: de deelverzamelingen van $\{1,2,3\}$. Bij de pijlen moet de verzameling in het uiteinde precies één element meer bevatten dan die in het begin.

Als voorbeeld. $\{1,2\}$ en $\{1,2,3\}$ zijn knopen. Er is een lijn $(\{1,2\},\{1,2,3\})$ tussen die knopen omdat $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ en omdat $|\{1,2,3\} - \{1,2\}| = |\{3\}| = 1$.

Er is geen lijn tussen $\{1,2\}$ en $\{2,3\}$ omdat niet $\{1,2\} \subseteq \{2,3\}$ (of andersom). Er is geen lijn tussen $\{1\}$ en $\{1,2,3\}$ omdat $|\{1,2,3\} - \{1\}| = 2$.



opm. Dit heet een *Hasse diagram* van de partiele ordening $\subseteq$. Zie Schaum Fig. 14-6. Maar dat hoef je niet te weten.

9) Bijvoorbeeld $K_{4,4}$, de complete graaf op vier knopen. Niet Eulers vanwege de graad van de knopen, die is oneven.

opm. Veel mensen wisten de graaf van Schaum te reconstrueren.

10) *opm.* Schaum, blz. 185. Maar daar staat nog een extra karakterisatie.

opm. Equivalentie betekent dat uit elk van beide beweringen de andere volgt. Twee redeneringen dus.

opm. Dit is geen multiple choice vraag.

$(a \Rightarrow b)$ Bij een cykel in een bipartiete graaf moeten de knopen afwisselend uit de beide partities komen. Als we terug zijn bij de beginknoop moeten we een even aantal keer van partitie gewisseld zijn, en is daarom de lengte van de cykel even.

$(b \Rightarrow a)$ We moeten de knopen van de graaf in twee partities verdelen, dat doen we door te 'kleuren'. Start met een willekeurige knoop en kleur die rood. Kleur de buren van de witte knoop rood, hun buren weer wit, etc. We krijgen zo nooit twee gelijkgekleurde burem omdat er anders een oneven cykel gevonden zou zijn.

HJH nov '12