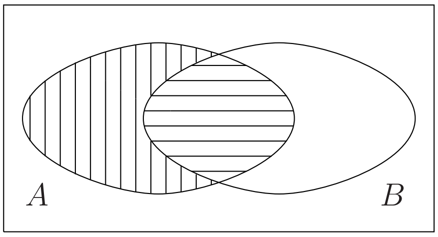
1. Zie *december 2003.*

1a. $A-B = A\cap B^c = (A^c\cup B)^c$, de eerste gelijkheid per definitie, de tweede via de Morgan.



Halen we B van A af dan vinden we het verticaal gearceerde gebied. Halen we dit weer van A af dan krijgen we het horizontaal gearceerde gedeelte: $A-(A-B) = A\cap B$.

b.

$$\begin{aligned}
A-(A-B) &= \text{definitie}\\
A\cap(A\cap B^c)^c &= \text{de Morgan}\\
A\cap(A^c\cup B) &= \text{dubb compl}\\
A\cap(A^c\cup B^{cc}) &= \text{distributief}\\
(A\cap A^c)\cup(A\cap B) &= \text{complement}\\
\varnothing\cup(A\cap B) &= \text{nulelement}\\
(A\cap B)&
\end{aligned}$$

c. Enerzijds $A\cap(A\cup A^c) = (A\cap A)\cup(A\cap A^c) = (A\cap A)\cup\varnothing = A\cap A$ wegens distributiviteit, complement, nulelement.

Anderzijds $A\cap(A\cup A^c) = A\cup U = A$ wegens complement en éénelement.

2a. Zie toets Den Haag *november 2011.*

$R(X)$: pijlen volgen vanuit X. $R(\{a,c\}) = \{1,2,3\}$. Voor $R^{-1}(\cdot)$ pijlen van de inverse relatie volgen, dwz. tegen de richting van R in. $R^{-1}(R(\{a,c\})) = R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{a,b,c\}$.

$R\circ R^{-1} \subseteq A\times A$. Is gelijk aan $\{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)\}$.

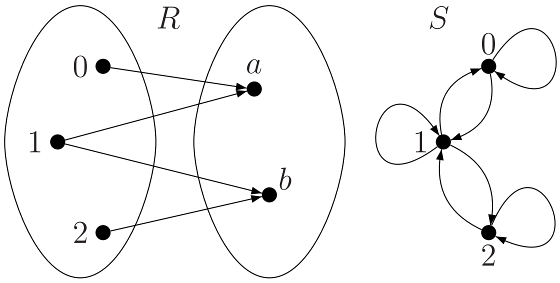
2b. Als toets *oktober 2012.*

Gegeven R is totaal: $\text{dom}(R) = A$.

Let op. De eigenschappen van relatie $S\subseteq A\times A$ worden hier bekeken, gedefinieerd mbv. relatie $S\subseteq A\times B$. Haal de twee niet door elkaar.

Volgens de definitie is $(x,y)\in S$ desdals er een $z\in B$ bestaat met $(x,z)\in R$ en $(z,y)\in R^{-1}$. Oftewel $(x,z)\in R$ en $(y,z)\in R$, dwz x en y 'wijzen' naar hetzelfde element in B.

opm. Om in de stemming te komen eerst een voorbeeld. $R\subseteq\{0,1,2\}\times\{a,b\}$, zie pijldiagram (links). Dan $S = R\circ R^{-1}\subseteq\{0,1,2\}^2$ (rechts).



Reflexief. Als $x\in A$ is er een $z\in B$ zodat $(x,z)\in R$ vanwege totaliteit. Dus $(z,x)\in R^{-1}$ en $(x,x)\in R\circ R^{-1}$.

Symmetrie. Als $x,y\in R\circ R^{-1}$ moet er een z zijn zodat $(x,z)\in R$ en $(z,y)\in R^{-1}$. Draai deze pijlen om: $(y,z)\in R$ en $(z,x)\in R^{-1}$, samengesteld $(y,x)\in R\circ R^{-1}$.

Niet altijd transitief. Dat voorbeeld heb ik niet voor niets getekend.

2c. *De relaties uit dit onderdeel zijn 'nieuw', en staan los van het vorige onderdeel. Dat had ik beter anders kunnen doen.*

Relaties zijn verzamelingen, we kunnen daar de gebruikelijke operaties op toepassen.

Vereniging. Nee, $\{(1,2)\}$ en $\{(2,3)\}$ zijn beide transitief, maar hun vereniging niet.

Doorsnede. Ja, als (x,y) en (y,z) in de doorsnede zit, dan zitten deze elementen in zowel R als in S. Omdat beide transitief zijn zit (x,z) in zowel R als in S, dus in de

doorsnede.
uit bundel

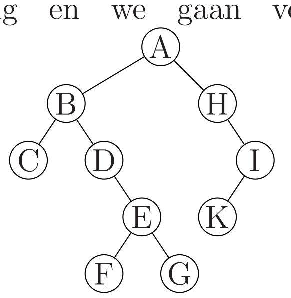
3. Zie *december 2004* en ook *maart 2005.*

3a. Volgens de 'Knuth' definitie is een binaire boom ofwel leeg, ofwel een wortel met twee disjuncte binaire bomen, de linker en rechter deelboom van de wortel. We volgen deze definitie bij pre-ordening: de preordening van de lege boom is het lege rijtje, anders is de pre-ordening de wortel, gevolgd door de pre-ordeningen van de linker en rechter deel-bomen.

b. pre-ordening: $\underline{A}, B, C, D, E, F, G, H, I, K$
symmetrisch: $C, B, D, F, E, G, \underline{A}, H, K, I$

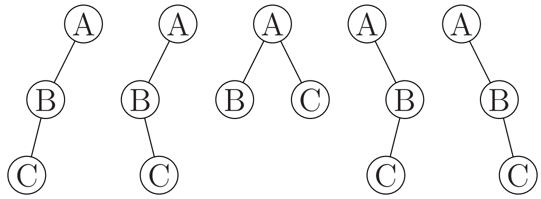
Vanwege de pre-ordening is A de wortel van de boom. Kijk nu naar A in de symmetrische ordening: C, B, D, F, E, G is de symmetrische ordening van de linker deelboom, H, K, I van de rechter. Dezelfde letters uit de pre-ordening horen bij deelbomen: B, C, D, E, F, G resp. H, I, K.

We hebben voor de twee deelbomen weer elk de pre-ordening en symmetrische ordening en we gaan verder.



c. Alle letters vóór A in de symmetrische ordening komen links, die na A komen rechts. Maar ook in de preordening komen de letters van links vóór die van rechts. Dat betekent dat die letters alfabetisch eerder komen. Niet elke permutatie is dus mogelijk.

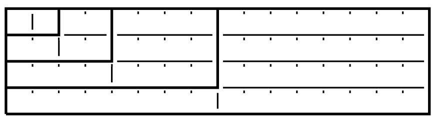
Illustratie: drie knopen en vijf bomen:



Bijbehorende symmetrische ordeningen zijn C, B, A; B, C, A; B, A, C; A, C, B; A, B, C. Permutatie C, A, B ontbreekt.

4. Zie *december 2005* en ook *maart 2009.*

5a. $n = 3$: $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^4$, of zo u wilt $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 4 \cdot 16$.



b. *Basis.* Voor $n = 0$ lezen we dat $2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^1$ en inderdaad $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$.

Inductiestap. Neem aan dat de formule klopt voor waarde n. Voor $n + 1$ schrijven we het linkerlid op, en splitsen de nieuwe term af; we mogen dan de inductiehypothese gebruiken. $\sum_{i=0}^{n+1}(i+2) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n}(i+2) \cdot 2^i + (n+3) \cdot 2^{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n+3) \cdot 2^{n+1} = 2(n+2) \cdot 2^{n+1} = (n+2) \cdot 2^{n+2}$. Precies wat we zoeken.

5a. Een graaf is bipartiet als de knopen in twee verzamelingen V_1 en V_2 verdeeld kunnen worden zodat elke lijn tussen V_1 en V_2 loopt. (Niet alle lijnen hoeven aanwezig te zijn.)

b. Een boom is bipartiet, stop nl. een knoop in V_1, al zijn buren in V_2, al hun buren weer in V_1, enz. *Ook*: Stelling zegt dat een graaf bipartiet is desdals er geen cykels van oneven lengte bestaan. Een boom heeft helemaal geen cykels, dus voldoet.

c. Maak de ongerichte boom gericht door een willekeurige knoop als wortel aan te wijzen. Nu heeft elke knoop een vader behalve de wortel. Omdat elke lijn tussen vader en kind wijst klopt de telling.

6a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x^2	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

b. Symmetrie tussen 1 en 11, zoals gesuggereerd. $(12-x)^2 = 12^2 - 2 \cdot 12x + x^2 \equiv x^2$, gewoon uitrekenen en 12-vouden weglaten. Kan ook zonder rekenen. Er geldt dat $12 - x \equiv -x$ modulo 12, dan ook gelijkheid voor de kwadraten $(12-x)^2 \equiv (-x)^2 = x^2$.

Extra. Er geldt óók symmetrie tussen 0 en 6 zoals je kunt zien. Zelfde rekenwerk: $(6-x)^2 = 12^2 - 2 \cdot 6x + x^2 \equiv x^2$.

c. We kijken hoe de machten zich gedragen.

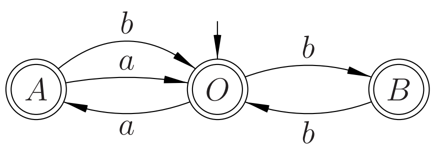
Er geldt $9^1 \equiv 9$, $9^2 \equiv 9$, dus $9^{71} \equiv 9$. Verder $8^1 \equiv 8$, $8^2 \equiv 4$, en $8^3 \equiv 8 \cdot 4 \equiv 8$. Daarom $8^{132} \equiv 4$.

Nu $9^{71} + 8^{132} \equiv 9 + 4 \equiv 1$.

7a. (i) In $(ab)^* = \{\lambda, ab, ababa, \ldots\}$ staat de letter a steeds op oneven positie Dat vinden we stoer.

(ii) Niet elk woord in $(aba)^*$ is stoer, bijvoorbeeld $abaabaaba$ heeft een a op positie 6, net na de b op positie 5. Daarom geldt de inclusie niet.

b. Elke knoop uit de automaat kan bijhouden of de positie van de komende letter even is, en of in dat geval de vorige letter een a of een b was.
O = oneven positie; A = even positie, vorige was a; B = even positie, vorige was b.



Geen transitie vanuit B met label a, want geen a op even positie na een b.
Begintoestand O, alledrie eindtoestand.
Inderdaad, deze automaat is niet deterministisch—dat werd deze maal niet gevraagd—maar dat is eenvoudig te herstellen.

c. We kunnen woorden checken op stoerheid door letters in tweetallen te bekijken, op achtereenvolgende oneven en even posities. Alleen de combinatie ba mag dan niet voorkomen. Dat verklaart de expressie.

Let op. Eigenlijk moeten we zowel aantonen dat $K \subseteq \{\}^* \cdot \{\}$ (alle stoere woorden voldoen aan de expressie) als $K \supseteq \{\}^* \cdot \{\}$ (de expressie bestaat uit stoere woorden). Niet veel mensen hebben dat heel nauwkeurig gedaan.

HJH jan '12 / dec'12