1a. In de uitwerking van *december 2006* vinden we de volgende oplossing.

$$\begin{array}{rl}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) = & \text{distribut} \\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((A \cup B^c) \cup A^c) = & \text{commutat} \\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((B^c \cup A) \cup A^c) = & \text{associat} \\
(A \cup (B^c \cup B)) \cap (B^c \cup (A \cup A^c)) = & \text{complem} \\
(A \cup U) \cap (B^c \cup U) = & \text{één-elem} \\
U \cap U = & \text{idempoten} \\
U &
\end{array}$$

In één van uw tentamens werd terecht opgemerkt dat $(A \cup B^c)$ en $(B \cap A^c)$ complementair zijn, en wordt een oplossing gegeven met behulp van de Morgan en dubbel complement. Goed gevonden!

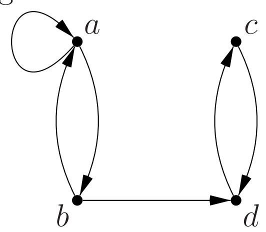
$$\begin{array}{rl}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) = & \text{dubb compl} \\
(A \cup B^c) \cup ((B \cap A^c)^c)^c = & \text{de Morgan} \\
(A \cup B^c) \cup (B^c \cup A^{cc})^c = & \text{dubb compl} \\
(A \cup B^c) \cup (B^c \cup A)^c = & \text{commutatief} \\
(A \cup B^c) \cup (A \cup B^c)^c = & \text{complement} \\
U &
\end{array}$$

b. Corollary 1.6: If A, B, and C are finite sets, then so is $A \cup B \cup C$ and $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$,
waarbij $n(X)$ het aantal elementen in X is.

c. Laat Z het cartesisch product uit de opgave zijn. Dan heeft Z natuurlijk $10 \cdot 2 \cdot 26 = 520$ elementen. Neem de verzamelingen A (component even) B (component `T`) en C (component klinker). De gevraagde verzameling is $A \cup B \cup C$ waarvan we het aantal elementen met inclusie en exclusie kunnen tellen, $5 \cdot 2 \cdot 26 + 10 \cdot 1 \cdot 26 + 10 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 \cdot 26 - 5 \cdot 2 \cdot 5 - 10 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \cdot 5 = 260 + 260 + 100 - 130 - 50 - 50 + 25 = 415$.

Na het vorige onderdeel was dit de logische stap. In een tentamen kwam ik weer een slimme oplossing tegen. Het aantal elementen $n(A \cup B \cup C)$ is gelijk aan $n(Z) - n(A^c \cap B^c \cap C^c)$, dus door het complement na te tellen. Dat geeft $520 - 5 \cdot 1 \cdot 21 = 415$.

2a. Inspiratie voor de opgave komt uit de opgavenbundel.



b. $R \circ R$, ontstaat door twee takken achter elkaar te nemen: $(a,a), (a,b), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (c,c), (d,d)$. Bij $R^{-1} \circ R$ eerst achteruit, dan vooruit, vinden we: $(a,a), (a,b), (a,d), (b,a), (b,b), (c,c), (d,a), (d,d)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Een ongerichte graaf heeft een symmetrische matrix. Een (multi-)graaf heeft geen lussen als de bijbehorende matrix alleen nullen op de diagonaal heeft. Een relatie is functioneel als in de bijbehorende graaf uit elke knoop ten hoogste één tak vertrekt, dus als in de bijbehorende matrix elke rij ten hoogste één waarde ongelijk nul is.

d. De transitieve afsluiting bepaalt alle paden (van één of meer stappen) die we kunnen volgen in de graaf. Dat kan door naar het plaatje te kijken, of je kunt R, R^2, R^3, ... bepalen totdat je geen nieuwe verbindingen meer vindt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

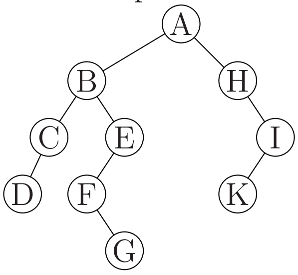
3) Voor wie geoefend heeft met het tentamen uit *december 2004* was hier geen verrassing.

a. pre(boom) = wortel, pre(links), pre(rechts)

b. pre-ordening: $\underline{A}, B, C, D, E, F, G, H, I, K$
symmetrisch: $D, C, B, F, G, E, \underline{A}, H, K, I$

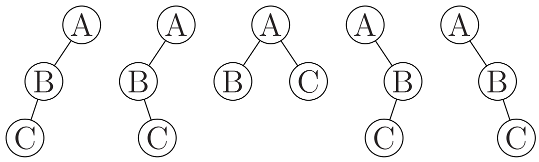
Vanwege de pre-ordening is A de wortel van de boom. Kijk nu naar A in de symmetrische ordening: D, C, B, F, G, E is de symmetrische ordening van de linker deelboom, H, K, I van de rechter. Dezelfde letters uit de pre-ordening horen bij deelbomen: B, C, D, E, F, G resp. H, I, K.

We hebben nu voor de twee deelbomen weer elk de pre-ordening en symmetrische ordening en we gaan verder op dezelfde manier.



c. Alle letters vóór A in de symmetrische ordening komen links, die na A komen rechts: (linker) A (rechter). Maar ook in de pre-ordening komen de letters van links vóór die van rechts: A (linker) (rechter). Dat betekent dat in de symmetrische ordening al die linker letters vóór de A alfabetisch eerder komen dan de rechter letters erna. Niet elke permutatie is dus mogelijk.

Illustratie: drie knopen en vijf bomen:



Bijbehorende symmetrische ordeningen zijn C, B, A; B, C, A; B, A, C; A, C, B; A, B, C. Permutatie C, A, B ontbreekt.

4a. Tel de Fibonacci getallen bij elkaar op.

n	0	1	2	3	4	5	6
F_n	0	1	1	2	3	5	8
$\sum_{k=0}^{n} F_k$	0	1	2	4	7	12	20

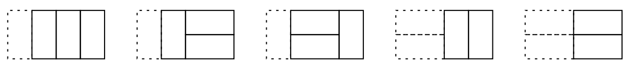
b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ voor $n \geq 0$.

basis. $(n = 0)$ $\sum_{k=0}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 0$, terwijl ook $F_{n+2} - 1 = F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Deze getallen zijn gelijk.

inductiestap. Neem aan dat de formule geldt voor n. Hieruit volgt dat de formule voor $n+1$ geldt, als volgt

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n+1} F_k & = & \text{laatste apart} \\ \sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1} & = & \text{inductieaanname} \\ F_{n+2} - 1 + F_{n+1} & = & \text{Fibonacci recursie} \\ F_{n+3} - 1 & & \text{zoals gewenst} \end{array}$$

c. Een rijtje domino's ter breedte n begint met óf een verticale domino, of met twee horizontale op elkaar. Als we die eerste weglaten vinden we een rijtje ter breedte $n-1$ dan wel $n-2$ terug. Dat verklaart de recursie.



5a. De relatie $R \subseteq A \times A$ heet reflexief indien xRx voor alle $x \in A$; symmetrisch indien als xRy dan yRx voor alle $x, y \in A$; transitief indien als xRy en yRz dan xRz voor alle $x, y, z \in A$;

b. Reflexief: voor elk interval geldt $[a,b] \triangleleft [a,b]$, want $[a,b] \cup [a,b] = [a,b]$.
Niet symmetrisch: er geldt $[1,2] \triangleleft [2,3]$ want $[1,2] \cup [2,3] = [1,3]$, terwijl niet $[2,3] \triangleleft [1,2]$ want $[2,3] \cup [1,2] \neq [2,2]$, door de formule precies in te vullen. De informele uitleg 'in het verlengde' laat iets meer toe, en is dan ook welwillend toegepast bij het nakijken.
Niet transitief: er geldt $[1,2] \triangleleft [2,3]$ en $[2,3] \triangleleft [3,4]$ maar niet $[1,2] \triangleleft [3,4]$ want

$[1,2] \cup [3,4] \neq [1,4]$ want er mist een stukje, de intervallen sluiten niet aan.

c. Intervallen $[a,b]$ en $[c,d]$ hebben gelijke lengte als geldt $b - a = d - c$. Of: gelijk beginpunt als geldt $a = c$.

6a. Voor samenhangende grafen geldt: $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$. De ondergrens geldt voor een boom, een minimaal verbonden graaf, de bovengrens bevat een lijn tussen elk tweetal knopen.

b. De uiteinden van e noemen we x en y.

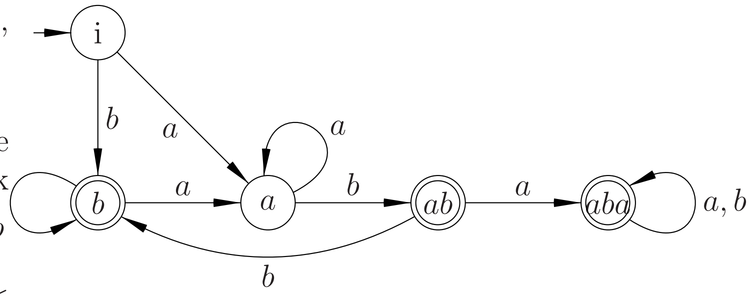
We beredeneren: als e een brug is, dan is $G - e$ niet samenhangend. Omdat e een brug is is $G - e$ niet samenhangend. Dat betekent dat knopen x en y niet meer verbonden zijn omdat anders de graaf $G - e$ gewoon samenhangend was geweest. Dat betekent dat er geen cykel met e bestaat omdat in dat geval x en y behalve via e ook op een ander manier verbonden zouden zijn.

Het omgekeerde moet ook bewezen worden, hoewel dat goeddeels dezelfde argumentatie is. Als e niet op een cykel ligt, lopen alle paden tussen x en y via de lijn e. Daarom zijn x en y niet langer verbonden in $G - e$ en is dus die graaf niet samenhangend.

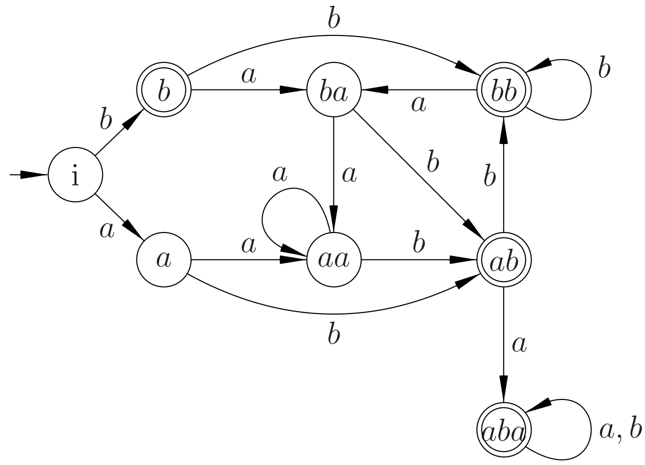
7a. $\{a,b\}^* \cdot \{aba\} \cdot \{a,b\}^* \cup \{a,b\}^* \cdot \{b\}$ (verzamelingsnotatie)

Als alternatief een reguliere expressie: $(a+b)^*aba(a+b)^* + (a+b)^*b$

c. Dit is een automaat voor subwoorden aba maar met een aparte begintoestand i. Aan het begin hebben we geen letters gelezen, maar later als we terugkomen was de laatste b (en moeten we accepteren).



Ik zag in een uitwerking hoe dat kan worden opgelost zonder dat je iets over het hoofd ziet. Hou de laatste twee gelezen letters bij, accepteer als de laatste een b is, en ga van ab met letter a niet naar ba, maar naar de speciale toestand aba.



HJH jan '11