Toets Fundamentele Informatica 1

oktober 2010

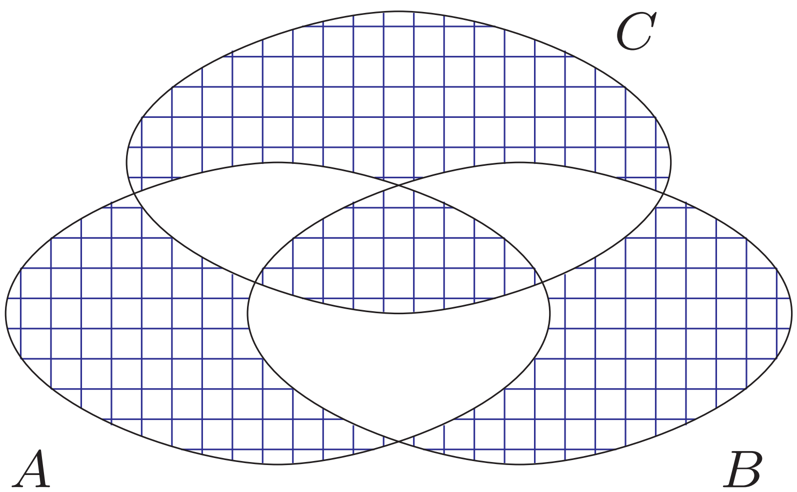
(als slides)

mét uitwerkingen

1. Gegeven $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 19\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 18\}$ en
$C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.
Bepaal $A \oplus B \oplus C$. Is het nodig om hier haakjes te zetten?

u1. Symmetrisch verschil! ($\neq$ doorsnede)

$A \oplus B \oplus C$



$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 19\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 18\}$:
$A \oplus B = \{1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$
(oneven óf 3-voud, maar niet beide),

$C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.
$(A \oplus B) \oplus C = \{2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$.
Ook 3 en 9 behoren hier toe, ze zitten in alledrie

Geen haakjes nodig, de operatie $\oplus$ is associatief.

2. Gegeven zijn de talen

$$K = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat deelwoord } bb\ \} \quad \text{en}$$

$$L = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft een even aantal } b\text{'s}\ \}$$

Teken een Venn diagram van $\{a,b\}^*$ met daarin K en L.
Plaats elk van de (acht) woorden van lengte drie in het juiste gebied.

u2. K: subwoord bb, L: even b's. Nul is even...

$K \setminus L$	$L \setminus K$	$K \cap L$	$(K \cup L)^c$
bbb	aaa	abb	aab
	bab	bba	aba
			baa

Maak hier zelf een diagram met vier gebieden van.

3. Gebruik de verzamelingenalgebra om de identiteit $(A \cup (A \cup B)) \cap (A \cup B^c) = A$ aan te tonen.

u3. $(A \cup (A \cup B)) \cap (A \cup B^c) =$ (associatief)

$((A \cup A) \cup B) \cap (A \cup B^c) =$ (idempotent)

$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) =$ (distribitief)

$A \cap (B \cup B^c) =$ (complement)

$A \cap V =$ (éénelement)

A

4. Laat $R = \{(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$ een relatie zijn op $A = \{1,2,3,4\}$.
Geef de matrixrepresentatie van R
Bepaal R^2 en $R^{-1} \circ R$.

u4. $R = \{(1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
maak een tekeningetje

$$R: \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$R^2: \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad R^{-1} \circ R: \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$R^2 = \{1,4\} \times \{2,3,4\} \qquad R^{-1} \circ R = \{2,3,4\} \times \{2,3,4\}$$

5. Voor deelverzamelingen A en B van $\mathbb{N}$ geldt de relatie $A \Diamond B$ als $A \cup B = \mathbb{N}$.
Onderzoek de eigenschappen reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit voor $\Diamond$.

u5. $A \diamondsuit B$ als $A \cup B = \mathbb{N}$.

niet reflexief:
voor $A = \varnothing$ geldt dat $A \cup A \neq \mathbb{N}$, dus *niet* $A \diamondsuit A$.

symmetrisch:
want als $A \diamondsuit B$ dan $\mathbb{N} = A \cup B = B \cup A$, dus $B \diamondsuit A$.
(kort: $\cap$ is commutatief)

niet transitief:
bijvoorbeeld $A = C = \varnothing$ en $B = \mathbb{N}$, dan $A \diamondsuit B$ en $B \diamondsuit C$,
maar niet $A \diamondsuit C$.

6. De verzamelingen A en B zijn eindig. Als de functie $f : A \to B$ injectief ('1-1') is, wat geldt dan voor de aantallen elementen $|A|$ en $|B|$? Idem waneer f surjectief ('op') is.
(Kies uit $|A| \leq |B|$, $|A| = |B|$, $|A| \geq |B|$, of 'onbekend' als je dat niet kunt weten.)

u6. $f : A \to B$ injectief. dan $f(x) \neq f(y)$ als $x \neq y$, dus méér elementen in B dan in A: $|A| \leq |B|$.

f surjectief. voor elke $y \in B$ moet er een $x \in A$ zijn met $f(x) = y$. voor elk element in B is er dus (tenminste één) een element in A te vinden: $|A| \geq |B|$.

opm. bij een bijectie moet daarom gelden $|A| = |B|$.

8. Teken een graaf met zes knopen van respectievelijk graad 4,4,3,3,2 en 1.

u8. knopen van graad 4,4,3,3,2 en 1

Dat kan niet.

In elke graaf (V, E) geldt $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, dwz. de som van de graden is even.

9. Voor ongerichte grafen geldt: als er een pad van u naar v is, dan is er ook een simpel pad van u naar v. Geef een bewijs.

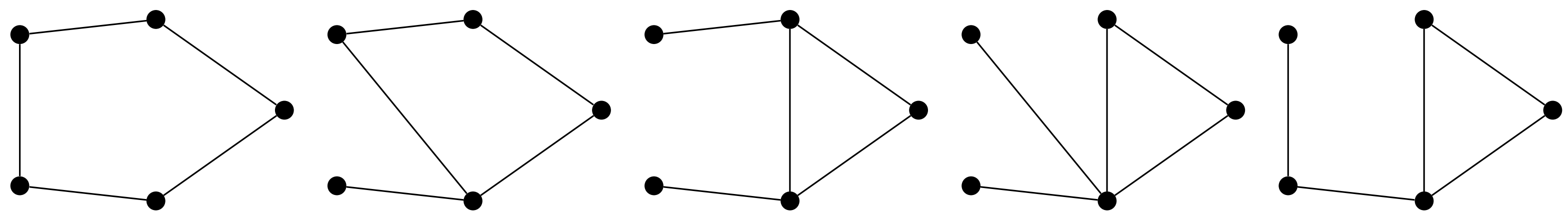
u9. Als $u = v$ is er een simpel pad van lengte nul. We nemen nu dus dat $u \neq v$.

Als er een pad van u naar v is, kijk dan naar een pad van minimale lengte. Zo'n minimaal pad kan geen knoop tweemaal bevatten omdat we anders het tussenstuk kunnen weglaten en een korter pad vinden; dit is niet mogelijk. Daarmee is het minimale pad simpel.

Opgelet: *niet* elk simpel pad heeft minimale lengte.

10. Bepaal alle niet-isomorfe (ongerichte) samenhangende grafen met vijf knopen en vijf lijnen.
(ik kom tot vijf stuks.)

u10. samenhangende grafen met vijf knopen en vijf lijnen.



opm. een boom heeft één knoop meer dan lijnen. hier gaat het dus om een boom met een extra lijn.