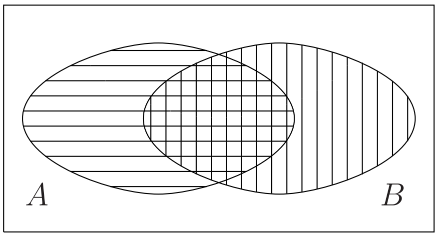
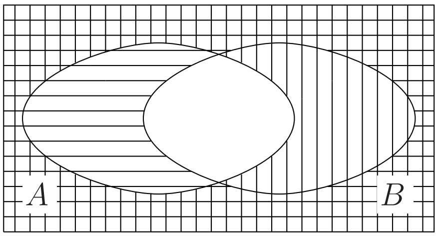
1. *Venndiagram.* Arceer A horizontaal, en B verticaal. Nu is $A \cap B$ dubbel gearceerd, en daarmee $(A \cap B)^c$ alles wat *niet* dubbel gearceerd is.



Arceer A^c verticaal en B^c horizontaal. Nu is $A^c \cup B^c$ het gedeelte dat tenminste één keer gearceerd is.



In beide diagrammen wordt hetzelfde gedeelte gekozen, dus geldt $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2a. Gegeven is dat $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$ en $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$, dus dat $\varnothing \subseteq V$ en $\{\varnothing\} \subseteq V$. De inclusie $\varnothing \subseteq V$ geldt altijd, de tweede voorwaarde veronderstelt dat $\varnothing \in V$.

De kleinste verzameling V die voldoet is, $V = \{\varnothing\}$, en daarvoor geldt $\mathcal{P}(V) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

b. De machtsverzameling bestaat uit alle deelverzamelingen. Bij het kiezen van een deelverzameling uit n elementen kunnen we n maal een element wel of niet kiezen, in totaal 2^n mogelijkheden.

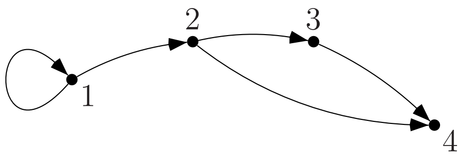
c. Neem aan dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ aftelbaar is. Er bestaat dus een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, dwz. een rij verzamelingen V_i, $i \in \mathbb{N}$, die alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ vormen.

Construeer nu de verzameling V als volgt: voor $n \in \mathbb{N}$, $n \in V$ desdals $n \notin V_n$. Duidelijk is dat voor elke n geldt dat $V \neq V_n$, omdat ze in ieder geval het element n verschillen.

We hebben nu een verzameling $V \subseteq \mathbb{N}$ die niet in de rij V_i voorkomt, in tegenspraak met de oorspronkelijke aanname. Kortom $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is niet aftelbaar.

d. Noem de verzameling verkregen door diagonalisatie D. Wanneer de de rij $V_i = \{\{i, i+1, 1+2\}\}$ diagonaliseren geldt voor elke n dat $n \in V_n$ en dus dat $n \notin D$. We vinden zo $D = \varnothing$, een verzameling die niet tot V behoort. We vinden zo inderdaad een verzameling die nog niet voorkomt in de rij, maar wel één die we niet nodig hebben omdat deze niet tot V behoort.

3a. Zie plaatje. X^{-1} is de verzameling $\{(1,1), (2,1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$. Als plaatje keren we de pijlen om.



b. Niet reflexief: $(2,2) \notin X$. Niet symmetrisch: $(1,2) \in X$, terwijl $(2,1) \notin X$. Wel antisymmetrisch: er zijn geen pijlen (i,j) en (j,i) met $i \neq j$.

c. De transitieve afsluiting van X is gelijk aan $\{(1,1)\} \cup \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$, de begin- en eindpunten van niet-lege paden in X.

d. Relaties die zowel symmetrisch als antisymmetrisch zijn, zijn precies de deelverzamelingen van de identiteit, dus $R \subseteq \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ naar keuze.

Geen van beide eigenschappen heeft $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$.

e. In de gegeven $R^3 \subseteq R \cup R^2$, kunnen we de relatie met R samenstellen, en vinden we $R^4 \subseteq R^2 \cup R^3$. Nogmaals het gegeven invullen levert $R^2 \cup R^3 \subseteq R^2 \cup R \cup R^2 = R \cup R^2$.

4a. Dat worden respectievelijk 3,7,15 knopen. Die ik hier niet ga tekenen.

b. *basis.* Een binaire boom van hoogte $h = 1$ heeft precies één knoop, precies de grens $2^1 - 1$.

inductiestap. Neem aan dat de bewering geldt voor bomen van hoogte maximaal h. We laten zien dat de bewering ook waar is voor hoogte $h+1$. Deze laatste bomen hebben een wortel, en twee subbomen, van hoogte h en van hoogte h' met $h' \leq h$. Het aantal knopen is dan maximaal $1 + (2^h - 1) + (2^{h'} - 1)$. Omdat $h' \leq h$ is dat ten hoogste $2 \cdot 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$, zoals gevraagd.

5a.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

b. Voor $x = 0 \bmod 5$ geldt natuurlijk dat $x^{23} + x^{17} = 0 \bmod 5$, en dus geldt dat $x^{23} + x^{17}$ deelbaar is door 5 als x een vijfvoud is.

Voor elke andere waarde geldt dat $x^4 = 1 \bmod 5$, zie de tabel, dus mogen we bij de exponenten viertallen wegschrappen. $x^{23} + x^{17} = x^3 + x^1 \bmod 5$. Volgens de tabel hierboven is $x^3 + x$ gelijk aan respectievelijk 2, 0, 0, 3 (modulo 5) voor 1,2,3,4. Dat betekent dat $x^{23} + x^{17}$ een vijfvoud is als x rest 2 of 3 heeft bij deling door 5 (bovenop rest 0 die we al vonden).

6a. Een (multi-)graaf is ongericht als de matrix symmetrisch is. Een gewone graaf als de matrixelementen 0 of 1 zijn, en de diagonaal alleen uit nullen bestaat. De relatie is totaal als in de graaf overal een pijl vertrekt, en dus elke rij tenminste één 1 bevat.

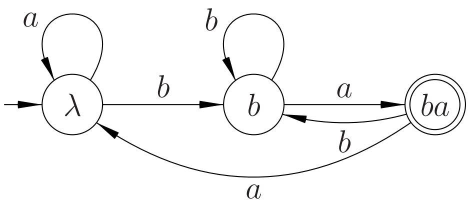
b. Een Euler graaf heeft een gesloten pad waarin elke lijn precies één keer voorkomt. Dat dan als de graaf samenhangend is en elke knoop even graad. Dat laatste is niet zo. Er is wel een (niet gesloten) pad van die vorm, beginnend en eindigend met de knopen van oneven graad, 2,1,3,2,4,3,5,4.

7a. De laatste twee letters liggen vast, *ba*, *bba*, *aaba*, *bbba*.

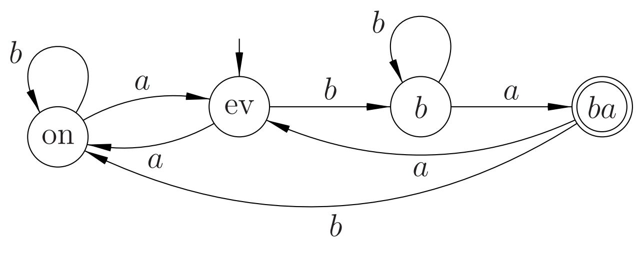
b. Voorafgaand aan de laatste *ab* moet een even aantal *a*'s komen. Op die manier komen we tot de expressie $(b^*ab^*ab^*)^*ab$.

(oeps.) We kunnen op die manier niet alleen *b*'s voor de *ab* plaatsen. De expressie moet dus worden $(b^*ab^*ab^*)^*ab + b^*ab$, of ook $(b^*ab^*a)^*b^*ab$.

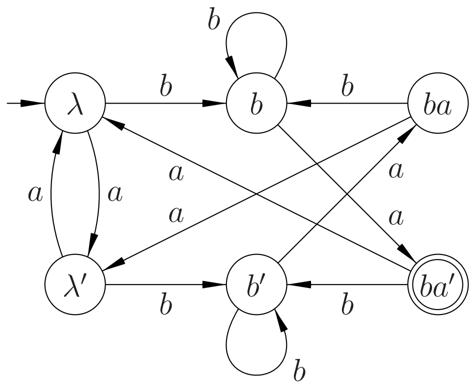
c. Begin met een automaat voor woorden eindigend op *ba*.



i Zorg ervoor dat we alleen 'naar *ba* toekunnen' als we een even aantal *a*'s hebben gezien. We maken daartoe een extra kring met een even aantal *a*'s.



ii Alternatief. Verdubbel de automaat voor suffix *ba*. Verwissel dan de bedrading voor de a overgangen, zodat ze tussen 'origineel' en 'kopie' gaan lopen, maar nog wel in de oude toestand.



Deze automaat houdt én het aantal a's bij, en of we op weg zijn naar ba. In de toestanden met een accent is het aantal a's oneven.

c-iii Als alternatief maken we een automaat die zowel de laatste twee letters bijhoudt als de pariteit (even/oneven) van het aantal gelezen a's. Je krijgt dan een automaat met elf toestanden en één eindtoestand (ab als laatste twee letters en een oneven aantal a's). Die methode is wat meer werk vanwege al die toestanden, maar heeft geen scherpe inzichten nodig.

d. Methode **ii**, nu met eindtoestanden in λ', b' en ba' voor oneven aantal a's, en ba (en ba') voor suffix ba.

Methode **iii**, nu met eindtoestanden voor gelezen ab (oneven of even) en alle toestanden met oneven aantal a's (ongeacht wat gelezen is).