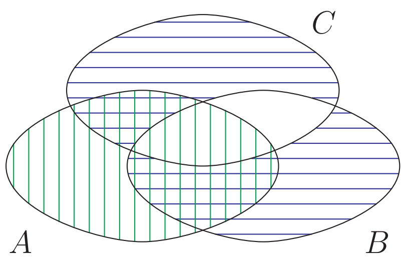
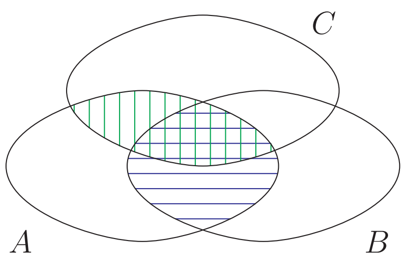
1a. $\{1,4,5,6,9,10\}$
Herhaald de operatie $\oplus$ toepassen: $\{1,2\} \oplus \{2,3,4\} \oplus \{3,4,5,6\} \oplus \{4,5,6,7,8\} \oplus \{5,6,7,8,9,10\}$. Omdat $\oplus$ associatief is, maakt het niet uit hoe we deze expressie uitrekenen: haakjes zijn overbodig. We houden precies de elementen over die een oneven aantal verzamelingen voorkomen.

$\{1,2\} \oplus \{2,3,4\} = \{1,3,4\}$,
$\{1,3,4\} \oplus \{3,4,5,6\} = \{1,5,6\}$,
$\{1,5,6\} \oplus \{4,5,6,7,8\} = \{1,4,7,8\}$,
en tenslotte $\{1,4,7,8\} \oplus \{5,6,7,8,9,10\} = \{1,4,5,6,9,10\}$.

b. *Venndiagram.* Arceer A vertikaal, en $B \oplus C$ horizontaal. $A \cap (B \oplus C)$ is het gedeelte dat dubbel is gearceerd.



Arceer $A \cap B$ horizontaal, $A \cap C$ vertikaal. Dan is $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$ het gedeelte dat precies één arcering heeft.



De gebieden corresponderend met de uitdrukkingen komen overeen. De gelijkheid geldt dus.

c. Nee. Neem $A = \{1\}$ en $B = C = \varnothing$.
Dan is $A \cup (B \oplus C) = \{1\} \cup \varnothing = \{1\}$, terwijl $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \{1\} \oplus \{1\} = \varnothing$.
De uitdrukkingen zijn dus niet (altijd) aan elkaar gelijk.
Opgave 1b&c komen uit de opgavenbundel.

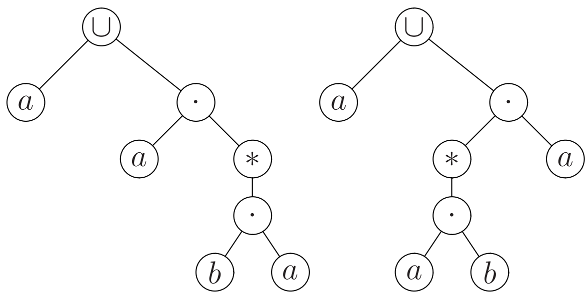
2a. X^2, twee takken achter elkaar, bestaat uit: $(0,2), (0,5), (1,1), (2,2), (3,2), (3,5), (4,1)$.

$X \circ X^{-1}$, tak heen dan tak terug, bestaat uit: $(0,0), (0,3), (1,1), (1,4), (2,2), (3,0), (3,3), (4,1), (4,4)$.

b. R is injectief als in elk punt van V ten hoogste één pijl aankomt.
Dit is precies het geval als $R \circ R^{-1} \subseteq 1_V$.

c. R is transitief als voor elk twee opeenvolgende takken xRy en yRz ook de tak xRz aanwezig is.
Dit is precies het geval als $R \circ R \subseteq R$.
Opgave en uitwerking uit Maart 2004.

3a. De operator met de laagste prioriteit zien we in de wortel, boom links.



b. $\mathrm{mir}(a \cup a \cdot (b \cdot a)*) = \mathrm{mir}(a) \cup \mathrm{mir}(a \cdot (b \cdot a)*) = a \cup \mathrm{mir}((b \cdot a)*) \cdot \mathrm{mir}(a) = a \cup \mathrm{mir}(b \cdot a) * \cdot a = a \cup (\mathrm{mir}(a) \cdot \mathrm{mir}(b)) * \cdot a = a \cup (a \cdot b) * \cdot a$.

De boom staat hierboven, rechts.

c. In het algemeen laat mir de expressie ongewijzigd. Alleen bij $\cdot$ worden linker en rechter argument verwisseld. Datzelfde moet dus bij de bomen gebeuren. Verwissel bij elke $\cdot$ linker en rechter subboom.
Opgave en uitwerking uit December 2006.

4ab. Zie dictaat.

c. Kies A_i als de verzameling van alle rijtjes van natuurlijke getallen ter lengte maximaal i en alle getallen maximaal i. Dan is elke verzameling A_i eindig (dus aftelbaar), en omdat $\mathbb{N}^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ geldt dat deze verzameling aftelbaar is.
Opgave uit Maart 2003.

5a. Een graaf is samenhangend als voor elk tweetal knopen x, y er een pad is van x naar y. Een samenhangende graaf is een boom als deze geen cykels bevat.

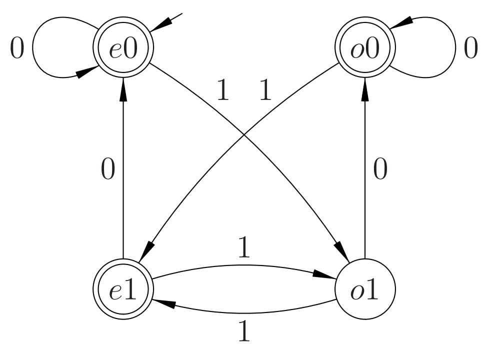
b. Voor *samenhangende* grafen geldt: $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$. De ondergrens geldt voor een boom, een minimaal verbonden graaf, de bovengrens bevat een lijn tussen elk tweetal knopen.
Maar 'samenhangend' was uit de opgave weggevallen, dus: $0 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

c. Neem twee knopen x en y. Omdat G samenhangend is, is er een pad π van x naar y in G. Als dit pad de lijn e niet bevat, is π ook een pad in $G - e$, en zijn x en y nog verbonden. Anders voldoet π niet. Omdat e op een kring ligt, worden de uiteinden van e nog door een ander pad verbonden, dat e niet bevat. Als we in π de enkele lijn e door dit pad vervangen, vinden we een nieuw pad in $G - e$ dat x en y weer verbindt.

Merk op dat deze eigenschap niet voor gerichte grafen geldt. Waar gaat de redenering fout?

d. Dit is een equivalentierelatie omdat aan de drie eisen is voldaan:
reflexief. Elke knoop x heeft een pad naar zichzelf, een pad ter lengte nul.
symmetrisch. Als er een pad is van x naar y mogen we dit ook in omgekeerde volgorde doorlopen omdat de graaf ongericht is. Er is dus ook een pad van y naar x.
transitief. Als er een pad is van x naar y en een pad van y naar z, dan kunnen we deze paden achter elkaar doorlopen en krijgen we een pad van x naar z.
Opgave en uitwerking uit Januari 2008.

6a. We houden de kenmerkende eigenschappen van woorden bij, even/oneven aantal 1'en (e/o) en de laatste letter (0/1). We krijgen zo vier toestanden.



Het lege woord heeft geen laatste letter, maar we kunnen in $e0$ beginnen.

b. Het complement bestaat uit alle woorden die niet in de oorspronkelijke taal zitten, die dus niet eindigen met een 0 én een oneven aantal 1'en bevatten. Niet eindigen met een 0 betekent eindigen met een 1, ofwel het lege woord. Dat laatste woord zit niet in het complement want dat heeft een even aantal 1'en.

Dezelfde automaat als hierboven voldoet, nu met één eindtoestand $o1$.

c. Eindigt met een 0: $\{0,1\}^* \cdot 0$; even aantal 1'en $(0^*10^*10^*)^*$. De complete taal is de vereniging van deze twee.

HJH jan '09 v.2

extra.

1a. Dit is *niet* de verzameling elementen die precies één keer voorkomen, dat geldt alleen voor de 'xor' van twee verzamelingen.

1b. *Redenatie.* Stel element x zit in $A \cap (B \oplus C)$ dan zit x in A en precies één van de verzamelingen B en C, dus in precies één van de verzamelingen $A \cap B$ en $A \cap C$, en daarom in $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$. Dit bewijst $A \cap (B \oplus C) \subseteq (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

Omgekeerd, stel $x \in (A \cap B) \oplus (A \cap C)$, dan zit x in precies één van de verzamelingen $A \cap B$ en $A \cap C$. Stel $x \in A \cap B$ (dus x zowel in A als in B). Er moet dan gelden dat $x \notin C$, want $x \notin A \cap C$, terwijl $x \in A$. Er geldt daarom dat $x \in B \backslash C$, dus in $B \oplus C$. Uiteindelijk zit dan x ook in $A \cap (B \oplus C)$.

Als $x \in A \cap C$ (en niet in $A \cap B$) geldt een gelijke redenatie, dus $A \cap (B \oplus C) \supseteq (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

Ook een *algebraisch* bewijs is mogelijk, maar dan moeten we eerst $\oplus$ uitschrijven in de gebruikelijke operaties:
$X \oplus Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$.

1c. Dit is *niet* de duaal van de formule uit het vorige onderdeel. Er is namelijk geen duaal van de operator $\oplus$ gedefinieerd. Pas als we een uitdrukking met $\varnothing$, $\cap$, $\cup$ en ^{c} hebben kunnen we een duaal opschrijven.

1b. Deze opgave lukt *niet* met inductie. Daarmee kunnen we van elke eindige vereniging bewijzen dat deze aftelbaar is, maar niet van een oneindige vereniging.

6a. De automaat kan compacter zo je wilt. Knopen $e1$ en $e0$ kunnen worden samengevoegd.