1a.
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= \quad \text{dis} \\ A \cup (B \cap B^c) &= \quad \text{cmp} \\ A \cup \varnothing &= \quad \text{nul} \\ A & \end{aligned}$$

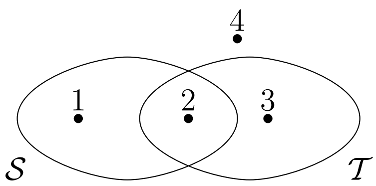
wegens respectievelijk: distributief, complement, nulelement.

b. De duale bewering is $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$, verwissel $\cap$ en $\cup$, resp. U en $\varnothing$.

Bij elke gelijkheid geldt de duale ook. Immers, bij elke regel geldt ook een duale, en een bewijs kan omgezet worden in een duaal bewijs.

Uitleg. Universum $\mathcal{U}$ bestaat uit relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$. Relaties zijn zelf ook verzamelingen, nl. deelverzamelingen van het cartesisch product $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$. Daarmee is $\mathcal{U}$ dus de machtsverzameling hiervan, $\mathcal{P}(\ \{1, 2, 3, 4\}^2\ )$.

c.



1: $\{(1, 2), (2, 1)\} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$, niet transitief, wel symmetrisch.
2: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$, transitief en symmetrisch. Ook $\varnothing$ voldoet!
3: $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \in \mathcal{T} - \mathcal{S}$, transitief, niet symmetrisch. Ook $\{(1, 2)\}$ voldoet.
4: $\{(1, 2), (2, 3)\} \in (\mathcal{T} \cup \mathcal{S})^c$, noch transitief, noch symmetrisch.

d. $\{1, 2, 3, 4\}$ heeft 4 elementen, $\{1, 2, 3, 4\}^2$ heeft er dus $4^2 = 16$, en $\mathcal{P}(\ \{1, 2, 3, 4\}^2\ )$ tenslotte heeft 2^{16} elementen.

2c. Vul de definities in. Voor alle $(x, y) \in U \times W$ geldt $(z, x) \in (R \circ S)^{-1}$ desdals $(x, z) \in R \circ S$ desdals $(x, y) \in R$ en $(y, z) \in S$ voor een $y \in V$ desdals $(y, x) \in R^{-1}$ en $(z, y) \in S^{-1}$ voor een $y \in V$ desdals $(z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

3a. $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 4 \cdot 5$.
In het plaatje zien we de linkerzijde als de oppervlakte van twee maal een setje van vier 'latjes' van lengte 1,2,3,4 en de rechterzijde is de oppervlakte van de rechthoek van hoogte 4 en breedte 5.

b. *basis.* Kies $n = 1$ en vul in. Links $2 \cdot 1$, rechts $1 \cdot (1 + 1)$, dus gelijk.

inductiestap. Neem aan dat de formule geldt voor n: $2 \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n + 1)$. We leiden daaruit de formule af voor $n + 1$.

Haal eerst de laatste term uit de sommatie.
$2 \sum_{k=1}^{n+1} k = 2 \sum_{k=1}^{n} k + 2(n + 1) = \ldots$
Hier kunnen we de oorspronkelijke formule (de inductiehypothese) invullen
$\cdots = n \cdot (n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$.

Dit geeft de gevraagde gelijkheid.

4a. Een graaf is samenhangend als voor elk tweetal knopen x, y er een pad is van x naar y. Een samenhangende graaf is een boom als deze geen cykels bevat.

b. $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$. De ondergrens geldt voor een boom, een minimaal verbonden graaf, de bovengrens bevat een lijn tussen elk tweetal knopen.

c. Neem twee knopen x en y. Omdat G samenhangend is, is er een pad π van x naar y in G. Als dit pad de lijn e niet bevat, is π ook een pad in $G - e$, en zijn x en y nog verbonden. Anders voldoet π niet. Omdat e op een kring ligt, worden de uiteinden van e nog door een ander pad verbonden, dat e niet bevat. Als we in π de enkele lijn e door dit pad vervangen, vinden we een nieuw pad in $G - e$ dat x en y weer verbindt.

Merk op dat deze eigenschap niet voor gerichte grafen geldt. Waar gaat de redenering fout?

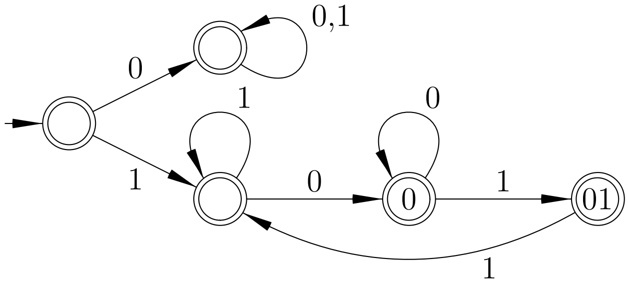
d. Dit is een equivalentierelatie omdat aan de drie eisen is voldaan:
reflexief. Elke knoop x heeft een pad naar zichzelf, een pad ter lengte nul.
symmetrisch. Als er een pad is van x naar y mogen we dit ook in omgekeerde volgorde doorlopen omdat de graaf ongericht is. Er is dus ook een pad van y naar x.
transitief. Als er een pad is van x naar y en een pad van y naar z, dan kunnen we deze paden achter elkaar doorlopen en krijgen we een pad van x naar z.

5c. Wat *niet* mag, is modulo 12 nemen toepassen in de exponent, ook al levert dat hier het goede antwoord op.

6a. De eis aan woorden uit de taal betekent dat een woord niet subwoord 010 mag hebben en toch met een 1 begint. De taal is daarmee gelijk aan $(S \cap T)^c$.

b. λ zit in de taal. Woorden die met een 0 beginnen zitten allemaal in de taal. Ook λ zit in de taal. Woorden die met een 1 beginnen mogen subwoord 010 niet bevatten. Dat betekent dat we moeten zorgen dat er geen segment van achtereenvolgende 1-en is ter lengte 1 (behalve eventueel als prefix of als suffix).
De expressie is daarmee $\{\lambda\} \cup \{0\}\{0,1\}^* \cup \{1\}\,(\{0\} \cup \{11\}\{1\}^*)^*\,\{\lambda, 1\}$,
vaak korter geschreven als
$\lambda + 0\,(0+1)^* + 1\,(0{+}111^*)^*\,(\lambda{+}1)$.

c. De automaat kiest voor een 0 (daarna mag alles) of een 1 (waarna we het patroon 010 moeten vermijden).



HJH jan '08