1a. Even een Venn diagram op een kladbaadje tekenen om te zien dat er U uit moet komen, het universum.

$$\begin{array}{rl}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) = & \text{dis} \\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((A \cup B^c) \cup A^c) = & \text{cmm} \\
((A \cup B^c) \cup B) \cap ((B^c \cup A) \cup A^c) = & \text{ass} \\
(A \cup (B^c \cup B)) \cap (B^c \cup (A \cup A^c)) = & \text{cmpl} \\
(A \cup U) \cap (B^c \cup U) = & \text{een} \\
U \cap U = & \text{id} \\
U &
\end{array}$$

wegens respectievelijk: distributief, commutatief, associatief 2x, complement 2x, eenelement 2x, idempotent.

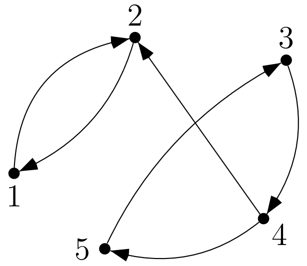
b. Corollary 1.6: If A, B, and C are finite sets, then so is $A \cup B \cup C$ and $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$,
waarbij $n(X)$ het aantal elementen in X is.

c. Als X het aantal x-vouden uit $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ is, dan $n(X) = 1000/x$ (integerdeling, gooi rest weg).

Laat nu A de 3-vouden zijn, B de 5-vouden, en C de 7-vouden, dan bestaat $A \cap B$ uit de 15-vouden, etc. Invullen in formule uit **1b.**

De 3-, 5- en 7-vouden bij elkaar: $n(A \cup B \cup C) = 333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 543$. Maar daar hebben we complement van nodig: antwoord dus 457.

2. Teken eens een plaatje.



a. $X \circ X$, twee takken achter elkaar, dus
$\{\ (1,1), (2,2), (3,2), (3,5), (4,1), (4,3), (5,4)\ \}$.

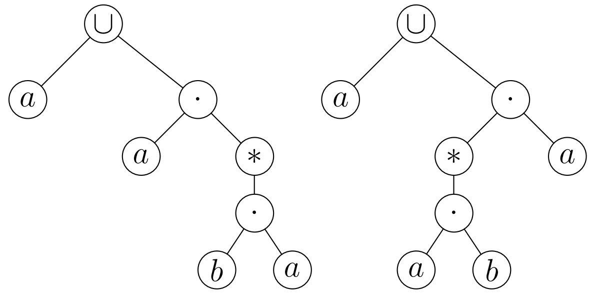
$X \circ X^{-1}$, heen en terug,
$\{\ (1,1), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4), (5,5)\ \}$.

b. Vanuit 1 en 2 zijn alleen 1 en 2 te bereiken in een of meer stappen, vanuit $3, 4, 5$ zijn alle knopen te bereiken: $\{1,2\} \times \{1,2\} \cup \{3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$. Dat is natuurlijk
$\{\ (i,j) \mid i, j \in \{1,2\}\ \} \cup$
$\{\ (i,j) \mid i \in \{3,4,5\}, j \in \{1,2,3,4,5\}\ \}$.

c. Stel U heeft N elementen. Als er een pad via R-takken van i naar j is ($i \neq j$), dan moet dit in maximaal $N - 1$ stappen kunnen, omdat we ervan uit kunnen gaan dat we onderweg geen knoop twee keer aandoen. Dat betekent dat het paar (i,j) in een van de R^k met $k < N$ zit. De waarde n waar de vereniging op kan houden is dus gelijk aan $N - 1$. (zie ook Schaum.)

Kort antwoord: elke relatie over U heeft eindig veel paren. De volgende R^k kan dus niet steeds een nieuw paar toevoegen, en op een gegeven moment hebben we alle paren gevonden.

3a. De operator met de laagste prioriteit zien we in de wortel, boom links.



b. $\text{mir}(a \cup a \cdot (b \cdot a)*) = \text{mir}(a) \cup \text{mir}(a \cdot (b \cdot a)*) = a \cup \text{mir}((b \cdot a)*) \cdot \text{mir}(a) = a \cup \text{mir}(b \cdot a) * \cdot a = a \cup (\text{mir}(a) \cdot \text{mir}(b)) * \cdot a = a \cup (a \cdot b) * \cdot a$.

De boom staat hierboven, rechts.

c. In het algemeen laat mir de expressie ongewijzigd. Alleen bij $\cdot$ worden linker en rechter argument verwisseld. Datzelfde moet dus bij de bomen gebeuren. Verwissel bij elke $\cdot$ linker en rechter subboom.

4a. 'x in K_{on}' betekent natuurlijk hetzelfde als 'x heeft een even aantal a's'.

basis. Controleer regel 1: a bevat een oneven aantal a's, namelijk één.

inductiestap. Controleer regels 2 en 3: Als x en y in K_{on} dan xb en xya ook.
- xb bevat evenveel a's als x, en dat is oneven.
- als x en y een oneven aantal a's bevatten, dan heeft xy een even aantal a's, maar xya een oneven aantal.

b. Alle woorden in L beginnen met de letter a, volgt uit de regels. Dus $ba \in K_{on}$ maar $ba \notin L$, en daarmee (na **a.**) $L \subset K_{on}$.

c. De taal K_{on} wordt (bijvoorbeeld) gespecificeerd door de volgende regels:

1. $a \in K_{on}$.
2. als $x \in K_{on}$ dan $xb \in K_{on}$ én $bx \in K_{on}$.
3. als $x \in K_{on}$ dan $axa \in K_{on}$.

Elk woord met een oneven aantal a's behoort tot deze taal. We maken een reeks woorden die 'groeien' naar een gekozen woord. Eerst de middelste a (regel 1). Dan steeds herhaald het gewenste aantal b's bijplakken (regel 2) of tegelijk twee a's om het woord plaatsen (regel 3).

5a. Over 90 jaar. Dat zijn 90 keer 365 dagen, plus 23 schrikkeldagen (2007 is geen schrikkeljaar, 2008 wel, en dan precies 22 keer vier jaar). Dus over $90 \cdot 365 + 23 \equiv -1 \cdot 1 + 2 \equiv 1 \pmod 7$. Over één dag is het donderdag.

Vergelijk december 2004.

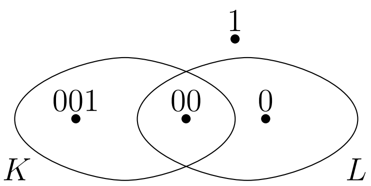
b. Ons getal x, $(\,a_n \ldots a_1 a_0\,)_8$ in het achttallig stelsel, is deelbaar door 4 als $x = \sum_{i=0}^{n} a_i 8^i \equiv 0 \pmod 4$. Omdat $8 \equiv 0 \pmod 4$, geldt ook voor machten $8^i \equiv 0 \pmod 4$ als $i \geq 1$. en $x \equiv a_0 \pmod 4$. Kortom als het laatste cijfer gelijk is aan 0 of 4.

Ons getal x, $(\,a_n \ldots a_1 a_0\,)_8$, is deelbaar door 7 als $x = \sum_{i=0}^{n} a_i 8^i \equiv 0 \pmod 7$. Omdat $8 \equiv 1 \pmod 7$, geldt ook voor machten $8^i \equiv 1 \pmod 7$ als $i \geq 0$. en $x = \sum_{i=0}^{n} a_i 8^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \pmod 4$. Kortom als de som der cijfers deelbaar is door 7.

Eigenlijk net als het tientallig stelsel met 5 resp. 9.

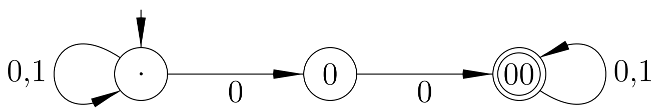
6. Vergelijk december 2003, en juli 2004.

7a.

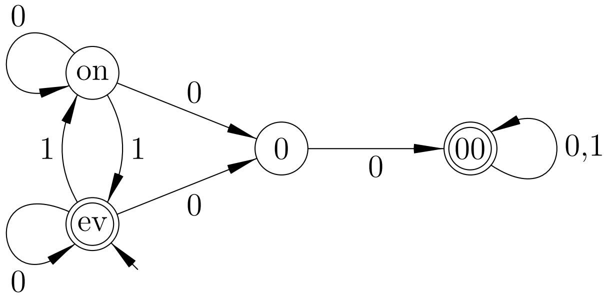


λ heeft geen subwoord 00, een even aantal 1-en (nl. nul), en behoort dus tot $L - K$, zelfde vakje als 0.

b. Begin met een niet-deterministische automaat voor L. Op een willekeurig moment kan het pad met de twee nullen gevolgd worden.



Om hier ook de strings van K te kunnen accepteren, tellen we in de begintoestand het aantal 1-en modulo twee.



Toegift.

1a. Zo althans heb ik **1b**, december 2002, voorgemaakt. U zelf had het volgende alternatief, dat eigenlijk overzichtelijker is:

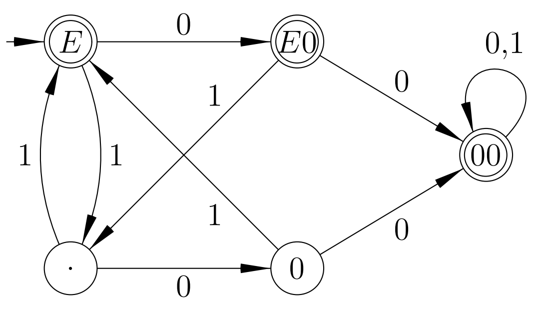
$$\begin{aligned}
(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c) &= \quad \text{ass} \\
A \cup (B^c \cup (B \cap A^c)) &= \quad \text{dis} \\
A \cup ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)) &= \quad \text{cmpl} \\
A \cup (U \cap (B^c \cup A^c)) &= \quad \text{een} \\
A \cup (B^c \cup A^c) &= \quad \text{cmm} \\
A \cup (A^c \cup B^c) &= \quad \text{ass} \\
(A \cup A^c) \cup B^c &= \quad \text{cmpl} \\
U \cup B^c &= \quad \text{een} \\
U &
\end{aligned}$$

5a. Inderdaad zegt '`cal 12 2096`':

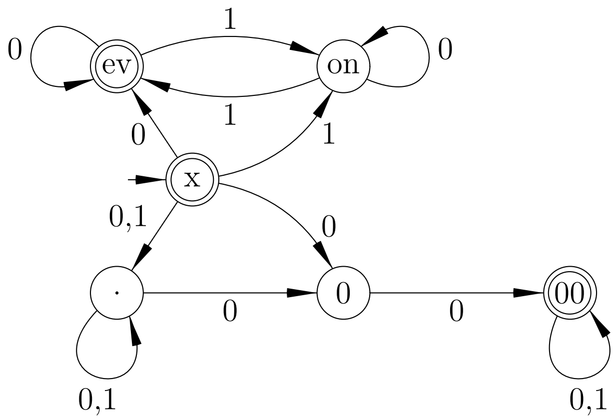
`December 2096`

Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	**20**	21	22
23	24	25	26	27	28	29

7b. Deterministisch: Maak onderscheid in de kenmerkende eigenschappen van K en L, en dat zijn de substring 00, en de 'pariteit' van het aantal 1-en (E in de toestand). Verder geeft 0 aan dat de laatste letter 0 was. Als er dan weer een 0 komt wordt het woord geaccepteerd, wat er daarna ook komt.



Nog een mogelijkeid. Teken eerst twee automaten voor K en L afzonderlijk. Voeg daaraan een extra toestand x toe die de taken van de twee begintoestanden overneemt (en dezelfde uitgaande takken krijgt als de twee oorspronkelijke).



HJH dec'06, jan'07