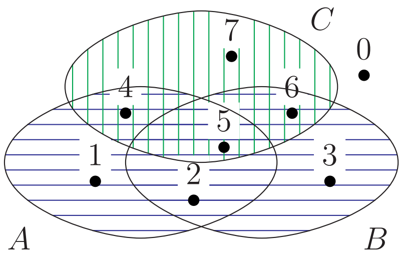
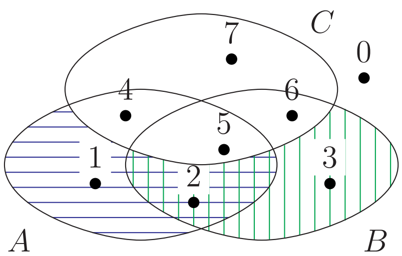
1a. Van links naar rechts. Gegeven is $A \cup B = A$, we laten zien dat $B \subseteq A$. Neem een element $x \in B$, dan ook $x \in A \cup B = A$. Klaar.

Van rechts naar links. Gegeven is $B \subseteq A$, we laten zien dat $A \cup B = A$. Er geldt altijd dat $A \cup B \supseteq A$, dus hoeven we alleen $A \cup B \subseteq A$ te beredeneren. Neem een element $x \in A \cup B$, dan $x \in A$ of $x \in B$. In het eerste geval is $x \in A$ duidelijk, in het tweede geval volgt dat uit het gegeven.

b. (mrt'09) Inmiddels streepjes leren zetten in LaTeX. Die zijn nu toegevoegd.



Eerste plaatje: $A \cup B$ bestaat uit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (horizontaal arceren); C bestaat uit $4, 5, 6, 7$ (verticaal arceren). $(A \cup B) - C$ bestaat uit enkele arcering horizontaal: $1, 2, 3$.



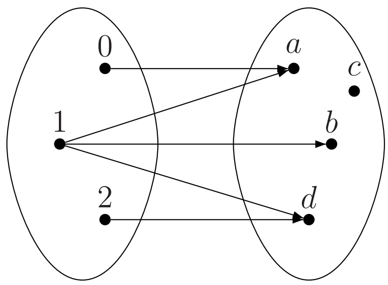
Tweede plaatje: $A - C$ bestaat uit $1, 2$ (horizontaal arceren); $B - C$ bestaat uit $2, 3$ (vertikaal arceren). $(A - C) \cup (B - C)$ is het gearceerde gedeelte $1, 2, 3$.

Dat is hetzelfde, dus de eigenschap geldt.

c. Vanuit $(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B)$ werken we naar beide formules toe, en zetten dit in één schema.

$$
\begin{array}{rcl}
A \cap (A \cup B) & = & \text{nul} \\
(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) & = & \text{distributief} \\
A \cup (\varnothing \cap B) & = & \text{nul} \\
A \cup \varnothing & = & \text{nul} \\
A & &
\end{array}
$$

2a. $X = \{\ (0, a), (1, a), (1, b), (1, d), (2, d)\ \}$



	a	b	c	d
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1
2	0	0	0	1

b. Eerst heen, dan terug: $X^{-1} \circ X = \{\ (a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (d, a), (d, b), (d, d)\ \} = \{a, b, d\} \times \{a, b, d\}$

X^2 is niet gedefinieerd, omdat codomein en domein van X verschillen: zie de definitie in de opgave, waar R en S de verzameling V gemeenschappelijk hebben.
$X^2 = \varnothing$ keur ik ook goed.

c. R is functioneel als de graaf van R maximaal één uitgaande pijl in elk element van het domein heeft. Dan geldt $R^{-1} \circ R \subseteq 1_V$. (intuitie: als je een pijl tegen de richting in volgt kun je alleen vooruit verder via dezelfde pijl.)

d. R is surjectief als in elk element van het codomein tenminste één pijl aankomt. Dan geldt $R^{-1} \circ R \supseteq 1_V$. (intuitie: je kunt in elk punt van het codomein vertrekken en weer aankomen als je heen en weer gaat)

3. Zie *december 2003* voor dezelfde opgave, met een andere boom. Vergelijk ook *juli 2004*, hoewel daar de operaties uit **b.** en de functie uit **c.** net anders zijn.

4. Uitgewerkt voor *maart 2004*.

5a. $2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^4$, of zo u wilt $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 4 \cdot 16$.

Twee blokjes, drie latjes van 2 blokjes, vier latjes van 4 blokjes, en vijf latjes van 8 blokjes maken samen een rechthoek van 4x16 blokjes. Net wat de formule zegt.

b. *Basis.* Voor $n = 0$ lezen we dat $2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^1$ en inderdaad $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$.

Inductiestap. Neem aan dat de formule klopt voor waarde n. Voor $n + 1$ schrijven we het linkerlid op, en splitsen de nieuwe term af; we mogen dan de inductiehypothese gebruiken. $\sum_{i=0}^{n+1}(i + 2) \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{n}(i+2) \cdot 2^i + (n+3) \cdot 2^{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n+3) \cdot 2^{n+1} = 2(n+2) \cdot 2^{n+1} = (n+2) \cdot 2^{n+2}$. Precies wat we zoeken.

6a. Het laatste cijfer van een getal is dat getal modulo 10. De reeks Psibonacci getallen modulo 10 is 2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, ...

De reeks gaat zich herhalen: $\psi_0 \equiv \psi_{12} \pmod{10}$, $\psi_1 \equiv \psi_{13} \pmod{10}$. Omdat twee achtereenvolgende getallen gelijk zijn aan het beginpaar, weten we dat de reeks zich (modulo 10) zal blijven herhalen: bijvoorbeeld $\psi_2 = \psi_0 + \psi_1 \equiv \psi_{12} + \psi_{13} = \psi_{14} \pmod{10}$. De periode is 12.

$\psi_{1000} \equiv \psi_4 \pmod{10}$, omdat $1000 \equiv 4 \pmod{12}$. Het laatste cijfer is daarmee 7.

De officiele naam van deze reeks is *Lucas* getallen. Er bestaan tal van magische relaties tussen de twee reeksen. Zie ook de gemaakte opgaven.

6b. Fibonacci getallen modulo 5, tot we een paar zien herhalen: **0**, 1, 1, 2, 3, **0**, 3, 3, 1, 4, **0**, 4, 4, 3, 2, **0**, 2, 2, 4, 1, **0**, 1, ... De periode is hier 20, en elk vijfde getal is nul modulo vijf. Goed gezien Jeroen.

7a. Taal ($\{0\}\{1\}^*\{0\}$)* of kortweg (01*0)*
(herhaal een excursie naar 1 inclusief de lus bij 1).

Niet deterministisch, er ontbreekt een tak met label 1 in toestand 0. Dit is eenvoudig te verhelpen met een garbage toestand.

b. Taal $\{0, 11\}^*\{1\}$ of $(0 + 11)^*1$
(van toestand 0 naar zichzelf terug, en uiteindelijk de laatste keer naar toestand 1).
Alternatief $\{0\}^*\{1\}(\ \{1\}\{0\}^*\{1\}\ )^*$ of $0^*1(10^*1)^*$
(ga eerst naar 1 en dan als in **a**)

Niet deterministisch wegens ontbrekende tak; eenvoudig te verhelpen.

c. Taal $(0 + 1(01^*0)^*1)^*1(01^*0)^*$, alternatief $0^*1(10^*1 + 01^*0)^*$
(vul **a** in **b** in; alternatief ga eerst naar 1)

Automaat is deterministisch: elke toestand heeft voor elk label een unieke uitgaande tak.

HJH jan/mrt'06; mrt'09; dec'10