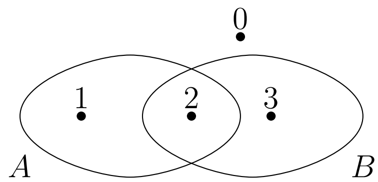
1a. $A \backslash B = A \cap B^c$, alles in A maar niet in B.

b. Streepjes zetten in LaTeX kost me te veel inspanning. Daarom zelf tekenen.



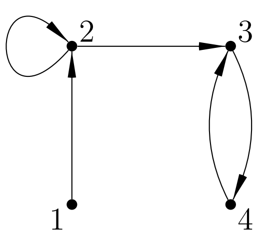
Eerste plaatje: $A \cup B$ bestaat uit $1,2,3$ (horizontaal arceren); $A \cap B$ bestaat uit 2 (verticaal arceren). $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$ bestaat uit enkele arcering horizontaal: $1,3$.

Tweede plaatje: $A \backslash B$ bestaat uit 1 (horizontaal arceren); $B \backslash A$ bestaat uit 3 (vertikaal arceren). $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ is het gearceerde gedeelte $1,3$.

c.

$$\begin{array}{rcl} (A \cup B) \backslash A & = & \text{omschrijven} \\ (A \cup B) \cap A^c & = & \text{distributief} \\ (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) & = & \text{complement} \\ \varnothing \cup (B \cap A^c) & = & \text{nul} \\ B \cap A^c & = & B \backslash A \end{array}$$

2a.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. $R^2 = \{ (1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4) \}$;
$R^3 = \{ (1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3) \}$;
$R \circ R^{-1} = \{ (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4) \}$.

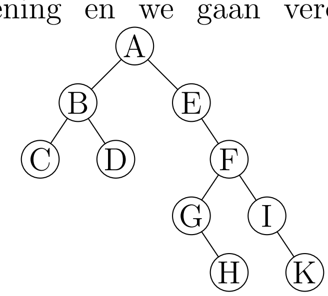
c. Nee, R^n bevat de tak $(3,3)$ voor alle even n, maar niet voor oneven waarden: er is alleen een pad van 3 naar zichzelf met een even aantal takken.

3) *zie december 2004*

3a. De pre-ordening van een (niet-lege) boom is de wortel, gevolgd door achtereenvolgens de pre-ordeningen [recursief!] van de linker en rechter deel-bomen.

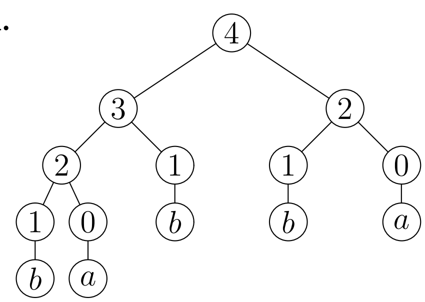
b. Uit de pre-ordening blijkt dat A de wortel is. Dan kunnen we de symmetrische ordening in knopen links en rechts van de wortel verdelen, en dit overnemen in de pre-ordening:
sym: (C,B,D), A, (E,G,H,F,I,K)
pre: A, (B,C,D), (E,F,G,H,I,K)

We hebben voor de twee deelbomen weer elk de pre-ordening en symmetrische ordening en we gaan verder.



c. Alle letters vóór A in de symmetrische ordening komen links, die na A komen rechts. Maar ook in de preordening komen de letters van links vóór die van rechts. Dat betekent dat die letters alfabetisch eerder komen. Niet elke permutatie is dus mogelijk. Bij drie knopen past bij pre-orde A,B,C niet een symmetrische ordening C,A,B.

4a.



b. Bewijs met volledige inductie, naar n.
Basis. Fun(0) en Fun(1) printen elk één symbool. Omdat $1 \leq 2^0$ en $1 \leq 2^1$ geldt de bewering voor $n = 0, 1$.

Inductiestap. We kiezen $n \geq 1$, en nemen aan dat de bewering tot en met deze waarde geldt. Fun(n+1) roept Fun(n) en Fun(n-1) aan die, volgens de aanname, ten hoogste 2^n respectievelijk 2^{n-1} symbolen printen. Samen zijn dat ten hoogste $2^n + 2^{n-1} \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, dus de bewering klopt ook voor $n + 1$.

Hoeveel symbolen precies? Fibonacci!

5a.

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

Symmetrie, modulo 12 geldt: $(12 - x)^2 \equiv 12^2 - 24x + x^2 \equiv x^2$

b. Voor $x = 1, 5, 7, 11$ is er zo'n inverse, nl. het getal zelf. De overige getallen tussen 0 en 11 zijn deelbaar door 2 of door 3. Elk veelvoud van die getallen is dus ook deelbaar door 2 of door 3, en dus nooit gelijk aan een 12-voud plus 1.

c. $17 \equiv 5$, dus $17^{331} \equiv 5^{2 \cdot 165} \cdot 5 \equiv (5^2)^{165} \cdot 5 \equiv 1^{165} \cdot 5 \equiv 5$.
$4^2 \equiv 4$, en daarmee (inductie) zijn alle machten van 4 gelijk aan vier modulo 12.

Totale rest $5 + 4 = 9$.

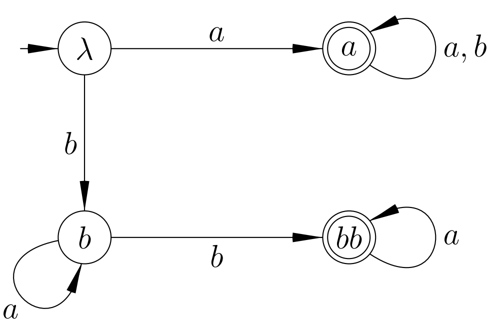
6) *opgave van december 2002.*
$R \subseteq A \times A$ is
reflexief: xRx voor alle $x \in A$,
irreflexief: xRx voor geen enkele $x \in A$,
symmetrisch: als xRy dan ook yRx,
anti-symm: als xRy en yRx dan $x = y$, en
transitief: als xRy en yRz dan xRz.

a. $x \mid y$: x deelt y.
reflexief (elk getal deelt zichzelf), dus niet irreflexief; antisymmetrisch (twee verschillende getallen kunnen elkaar niet delen omdat een groter dan de ander is), transitief (moet ik dat uitleggen?); niet symmetrisch (want 2|4 maar niet andersom).

b. xRy als $x = 2y$
irreflexief (als $x = 2x$ moet $x = 0$ en die waarde hoort niet tot het domein), dus niet reflexief; antisymmetrisch (als $x = 2y$ en $y = 2x$ moet $x = y$), dus niet symmetrisch; niet transitief ($4R2$, $2R1$ maar niet $4R1$)

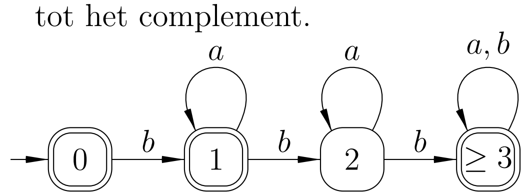
c. xRy als $x^2 \geq= y$
reflexief ($x^2 \geq x$); niet symmetrisch, noch antisymmetrisch ($5R2$ maar niet $2R5$, terwijl $2R3$ én $3R2$); niet transitief $2R3$, $3R8$ maar niet $2R8$.

7a.



Deze automaat is niet deterministisch, omdat toestand bb geen uitgaande b heeft.

b. Woorden beginnen *niet* met een a, én hebben *niet* precies twee b's (en dat is wat anders dan de a en de b uit de gegeven taal K verwisselen!). Het lege woord λ behoort tot het complement.



Ook niet deterministisch.

c. $a\{a,b\}^* \cup a^*ba^*ba^*$ of, zo u wilt,
$\{a\} \cdot \{a,b\}^* \cup \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$

HJH april '05