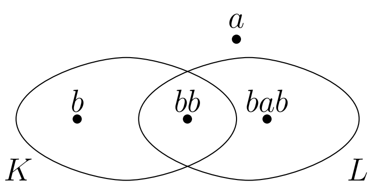
1a.
$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup B^c) &= \text{distributief} \\ A \cup (B \cap B^c) &= \text{complement} \\ A \cup \varnothing &= \text{nul} \\ A & \end{aligned}$$

b. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.
That's all: verwissel $\cap$ en $\cup$ en ook $\varnothing$ en U (hoewel die laatste twee hier niet staan).

c. Elk woord van K heeft een even aantal a's, dus a en bab behoren niet tot K. Elk woord van L heeft precies twee b's, dus a en b behoren niet tot L.



2a. tja.

b. $R(X) = \{\ 2, 3\ \}$,
$R^{-1}(R(X)) = \{\ a, b, c\ \}$; $R \circ R^{-1} = \{\ (a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\ \}$.

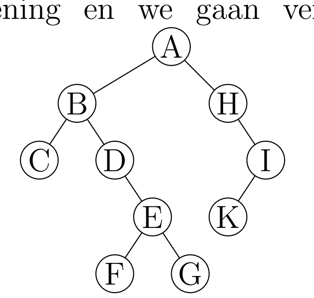
c. $R \circ R^{-1}$ is reflexief als voor elke $x \in U$ geldt dat $(x,x) \in R \circ R^{-1}$. Dit is het geval als in elke $x \in U$ een pijl van R vertrekt, die we dan heen en weer kunnen volgen, maw. als $\mathrm{dom}(R) = U$.

3a. Volgens de 'Knuth' definitie is een binaire boom ofwel leeg, ofwel een wortel met twee disjuncte binaire bomen, de linker en rechter deelboom van de wortel. We volgen deze definitie bij pre-ordening: de preordening van de lege boom is het lege rijtje, anders is de pre-ordening de wortel, gevolgd door de pre-ordeningen van de linker en rechter deel-bomen.

b. pre-ordening: $\underline{A}, B, C, D, E, F, G, H, I, K$
symmetrisch: $C, B, D, F, E, G, \underline{A}, H, K, I$

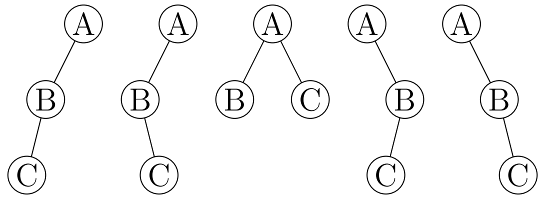
Vanwege de pre-ordening is A de wortel van de boom. Kijk nu naar A in de symmetrische ordening: C, B, D, F, E, G is de symmetrische ordening van de linker deelboom, H, K, I van de rechter. Dezelfde letters uit de pre-ordening horen bij deelbomen: B, C, D, E, F, G resp. H, I, K.

We hebben voor de twee deelbomen weer elk de pre-ordening en symmetrische ordening en we gaan verder.



c. Alle letters vóór A in de symmetrische ordening komen links, die na A komen rechts. Maar ook in de preordening komen de letters van links vóór die van rechts. Dat betekent dat die letters alfabetisch eerder komen. Niet elke permutatie is dus mogelijk.

Illustratie: drie knopen en vijf bomen:



Bijbehorende symmetrische ordeningen zijn C, B, A; B, C, A; B, A, C; A, C, B; A, B, C. Permutatie C, A, B ontbreekt.

4a. $\sum_{k=0}^{4} F_k^2 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 0 + 1 + 1 + 4 + 9 = 15$, 'toevallig' gelijk aan $F_4 \cdot F_5 = 3 \cdot 5$.

De sommatie $\sum_{k=1}^{0} F_k^2$ heeft géén termen, want eindigt voordat zij begint, en heeft (per definitie) waarde nul.

b. Bewijs met volledige inductie, naar n.

Basis $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0 = F_0 \cdot F_1$.

Inductie
Inductie-aanname: $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.
$\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 =$
vul inductieaanname in
$F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1}) \cdot F_{n+1} =$
gebruik de inductieve definitie
$F_{n+2} \cdot F_{n+1}$.

5a. We rekenen modulo 7, het aantal dagen per week. De genoemde datum valt over precies 94 jaar, dus 94 maal 365 dagen plus 23 schrikkeldagen. Omdat $365 \equiv 1 \bmod 7$ is dit samen $94 \cdot 365 + 23 \equiv 3 \cdot 1 + 2 \equiv 5 \bmod 7$ dagen verder in de week, en valt 22 december 2098 op maandag.

b. Algemeen geldig (als tenminste $z \geq 0$).
We weten, als $x_1 \equiv y_1 \mod m$ en $x_2 \equiv y_2 \mod m$, dan ook $x_1 \cdot x_2 \equiv y_1 \cdot y_2 \mod m$. Wanneer gegeven is dat $x \equiv y \mod m$, dan volgt met bovenstaande eigenschap (en inductie naar z) dat $x^z \equiv y^z \mod m$ voor elke $z \geq 0$.

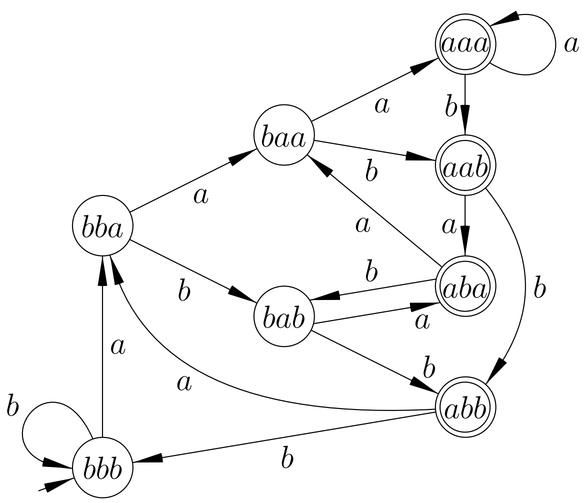
c. Dit is niet algemeen geldig. Een voorbeeld modulo 3. $1 \equiv 4 \bmod 3$, maar $2^1 \equiv 2$, terwijl $2^4 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 3$.

6a. $R \subseteq A \times A$ is
reflexief: xRx voor alle $x \in A$,
symmetrisch: als xRy dan ook yEx, en
transitief: als xRy en yRz dan xRz.

b. $[x] = \{z \in A \mid xRz\}$
'$\Rightarrow$' Als xRy dan $y \in [x]$ en $y \in [y]$ (vanwege reflexiviteit yRy), dus $y \in [x] \cap [y]$; de doorsnede is niet leeg.
'$\Leftarrow$' Als $z \in [x] \cap [y]$ dan xRz en yRz, dus zRY en dan xRy (vanwege symmetrie en transitiviteit).
Grappig: we hebben alledrie de eigenschappen gebruikt.

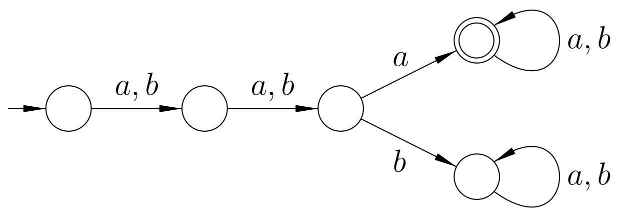
7a. Om dit deterministisch te kunnen accepteren moeten we de laatste drie gelezen letters in de toestand onthouden: toestanden hebben de vorm xyz met $x, y, z \in \{a, b\}$. De takken in de automaat worden gegeven door $(xyz, \sigma, yz\sigma)$, voor $x, y, z, \sigma \in \{a, b\}$. De begintoestand is bbb (dat staat voor 'geen a's gezien') en eindtoestanden hebben een a op de eerste positie (dat is de twee-na-laatst gelezen letter), dus ayz met $y, z \in \{a, b\}$.

Voor wie daar een plaatje van wil:



(lastig? voorgedaan op werkcollege.)

b. Véél makkelijker: de derde letter is een a.



c. $K = \{a, b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{aa, ab, ba, bb\}$
In het complement is de twee-na-laatste letter een b óf is het woord korter dan drie: $K^c = \{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{aa, ab, ba, bb\} \cup \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$

HJH jan '05 (nov'15)