1a. Een deelverzameling van V heeft elk van de n elementen wél of niet. We komen tot 2^n mogelijkheden.

b. Altijd $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing \subseteq V$.
Altijd $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing$ een deelverzameling van élke verzameling is.
Alleen $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$ als $\varnothing$ een *element* is van V.
Altijd $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$ omdat $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$, zie boven.

c. Ja, dat geldt. Omdat $U \subseteq U$ volgt $U \in \mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(V)$, en dus $U \subseteq V$. Evenzo $V \subseteq U$, en dus $U = V$.

2a. X^2, twee takken achter elkaar, bestaat uit: $(0,2), (0,5), (1,1), (2,2), (3,2), (3,5), (4,1)$.

$X\,;X^{-1}$, tak heen dan tak terug, bestaat uit: $(0,0), (0,3), (1,1), (1,4), (2,2), (3,0), (3,3), (4,1), (4,4)$.

b. R is injectief als in elk punt van V ten hoogste één pijl aankomt. Dit is precies het geval als $R\,;R^{-1} \subseteq 1_V$.

c. R is transitief als voor elk twee opeenvolgende takken xRy en yRz ook de tak xRz aanwezig is. Dit is precies het geval als $R\,;R \subseteq R$.

3a. Een verzameling is aftelbaar als zij eindig is of gelijkmachtig aan $\mathbb{N}$.

b. Orden $\{a,b\}^*$ naar lengte en vervolgens lexicografisch: $\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots$ Daarmee ontstaat een aftelling van $\{a,b\}^*$ (een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\{a,b\}^*$).

c. Gegeven een functie $f : V \to \mathcal{P}(V)$ kiezen we $D = \{\ x \in V \mid x \notin f(x)\ \}$. Voor $x \in V$ geldt per definitie $x \in D \iff x \notin f(x)$.
Als f surjectief is, dan moet er een $v \in V$ zijn met $D = f(v)$, immers $D \subseteq V$ en dus $D \in \mathcal{P}(V)$. Vul nu v voor x in: $v \in D \iff v \notin f(v) = D$, tegenspraak.
Willekeurig gekozen f kan niet surjectief zijn, en daarmee bestaan geen surjectieve functies van V naar $\mathcal{P}(V)$.

4. Bewijs met volledige inductie de bewering dat elke Blurp een oneven aantal Δ heeft of tenminste één $\diamond$.

Basis: Δ is een Blurp en heeft een oneven aantal Δ.

Inductie. Neem aan dat x en y Blurpen zijn die aan de bewering voldoen. We laten zien dat nu ook de daaruit geconstrueerde Blurp-en voldoen.

regel 2: Als x een oneven aantal Δ heeft, dan $x\Delta\Delta$ ook; als x een $\diamond$ heeft, dan $x\Delta\Delta$ ook. De string $\diamond xx\diamond$ heeft een $\diamond$ (ongeacht x).

regel 3: Als x en y geen $\diamond$ hebben, dan hebben zij elk een oneven aantal Δ, en $x\Delta y$ ook. Anders heeft of x of y een $\diamond$, of allebei, en $x\Delta y$ ook.

5a. reflexief: xEx voor alle x,
symmetrisch: als xEy dan ook yEx, en
transitief: als xEy en yEz dan xEz.

b. reflexief: $(a,b) \sim (a,b)$ omdat $ab = ba$,
symmetrisch: als $(a,b) \sim (c,d)$ dan $ad = bc$ dus $cb = da$ oftewel $(c,d) \sim (a,b)$,
transitief: als $(a,b) \sim (c,d)$ en $(c,d) \sim (e,f)$ dan $ad = bc$ en $cf = de$; daarom $adf = bcf = bde$; na delen door $d \neq 0$ $af = be$ oftwel $(a,b) \sim (e,f)$.

c. Breuken. Schrijf $\frac{a}{b}$ in plaats van (a,b). Dan $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ desdals $ad = bc$.

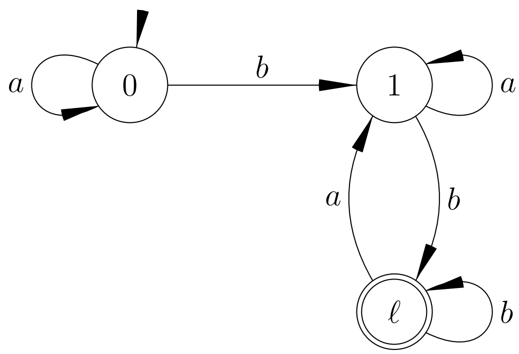
6a. We rekenen modulo 7, het aantal dagen per week. De genoemde datum valt over precies twaalf jaar, dus twaalf maal 365 dagen plus drie schrikkeldagen. Omdat $365 \equiv 1 \bmod 7$

is dit samen $12 \cdot 365 + 3 \equiv 12 + 3 \equiv 1 \bmod 7$, en valt 18 maart 2016 één dag later, op vrijdag.

b. Algemeen geldig (als tenminste $z \geq 0$).
We weten, als $x_1 \equiv y_1 \mod m$ en $x_2 \equiv y_2 \mod m$, dan ook $x_1 \cdot x_2 \equiv y_1 \cdot y_2 \mod m$.
Wanneer gegeven is dat $x \equiv y \mod m$, dan volgt met bovenstaande eigenschap (en inductie) dat $x^z \equiv y^z \mod m$ voor elke $z \geq 0$.

c. Dit is niet algemeen geldig. Een voorbeeld modulo 3. $1 \equiv 4 \bmod 3$, maar $2^1 \equiv 2$, terwijl $2^4 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 3$.

7a. De slimste automaat heeft drie toestanden: 0 nog geen b gezien, 1 tenminste één b, ℓ laatste letter b (en al eerder b gezien).



b. Twee b's, waarvan één de laatste letter, verder elke string toegestaan: $\{a,b\}^* \cdot b \cdot \{a,b\}^* \cdot b$,
ook wel geschreven als $(a{+}b)^*\, b\, (a{+}b)^*\, b$.