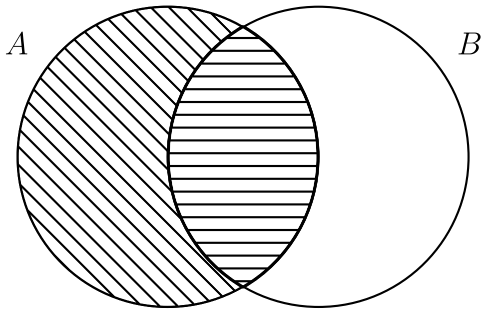
1a. $A - B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$, de eerste gelijkheid per definitie, de tweede via de Morgan.



Halen we B van A af dan vinden we het diagonaal gearceerde gebied. Halen we dit weer van A af dan krijgen we het horizontaal gearceerde gedeelte: $A - (A - B) = A \cap B$.

b.

$$\begin{array}{rcl}
A - (A - B) & = & \text{definitie} \\
A \cap (A \cap B^c)^c & = & \text{de Morgan} \\
A \cap (A^c \cup B) & = & \text{dubb compl} \\
A \cap (A^c \cup B^{cc}) & = & \text{distributief} \\
(A \cap A^c) \cup (A \cap B) & = & \text{complement} \\
\varnothing \cup (A \cap B) & = & \text{nulelement} \\
(A \cap B) & &
\end{array}$$

c. Enerzijds $A \cap (A \cup A^c) = (A \cap A) \cup (A \cap A^c) = (A \cap A) \cup \varnothing = A \cap A$ wegens distributiviteit, complement, nulelement.

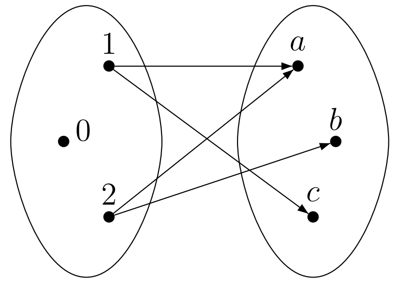
Anderzijds $A \cap (A \cup A^c) = A \cup U = A$ wegens complement en éénelement.

2a. De relatie $X^{-1}; X$ is een deelverzameling van $\{a, b, c\}^2$. Volg eerst een pijl terug (X^{-1}) en dan een pijl vooruit (X): $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, a), (c, c)\}$

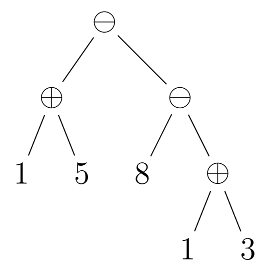
b. R is functioneel als vanuit elk punt van U ten hoogste één pijl vertrekt.

c. Te bewijzen R functioneel. Kies x, y zó dat xRy en xRz. (We moeten laten zien dat dan $y = z$, zie definitie in de opgave.)

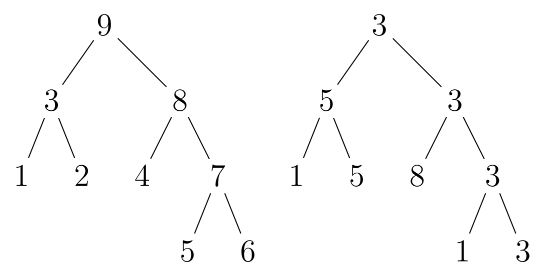
Omdat xRy volgt $yR^{-1}x$. Samen met xRz levert dat $y(R^{-1}; R)z$. Gegeven is dat $R^{-1}; R \subseteq 1_U$, dus $(y, z) \in 1_U$ oftewel $y = z$.



3a.



b.



c. Kijk in elke knoop naar beneden. Een blad heeft hoogte nul, de hoogte van een knoop is één hoger dan het maximum van de hoogtes van de kinderen: Basis $f(\text{blad}) = 0$, recursie $f(\text{knoop}) = \max\{f(\text{links}), f(\text{rechts})\} + 1$.

4a. Bewijs met volledige inductie.

Basis: $c_0 = 3^0 + (-2)^0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$, en $c_1 = 3^1 + (-2)^1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$, de formule klopt met de beginwaarden.

Inductie. Neem aan dat de formule klopt voor indices tot en met n. Dan kunnen we de formule invullen in de definitie $c_{n+1} =$

$c_n + 6c_{n-1} - 6 = 3^n + (-2)^n + 1 + 6[3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 1] - 6$.

Dit rekenen we verder uit. Gebruik $6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$, en $6 \cdot (-2)^{n-1} = -3 \cdot (-2)^n$. Dus $c_{n+1} = (1+2) \cdot 3^n + (1-3) \cdot (-2)^n + 1 = 3^{n+1} + (-2)^{n+1} + 1$; de formule voor $n+1$.

b. $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k = \frac{(-2)^{n+1}-1}{(-2)-1}$, daar hebben we een formule voor gehad. $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ zijn namelijk $n+1$ enen die opgeteld worden.

Voor $\sum_{k=0}^{n} c_k$ gebruiken we de formule uit **a.**: $c_k = 3^k + (-2)^k + 1$, dus $\sum_{k=0}^{n} c_k = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} + \frac{(-2)^{n+1}-1}{-3} + n + 1 = \frac{3^{n+2}+(-2)^{n+2}+6n+5}{6}$

5a. Een equivalentiereatie E is reflexief (xEx voor alle x), symmetrisch (als xEy dan ook yEx) en transitief (als xEy en yEz dan xEz).

b. Er geldt $0R1$, $2R4$ en $5R2$ maar *niet* $3R1$.

Vanwege transitiviteit ook $5R4$ (vanwege $5R2$ en $2R4$) en dan via symmetrie $5R4$, als gevraagd.

Stel dat $0R3$, dan ook $3R0$ (symmetrie). Vanwege $0R1$ tenslotte $3R1$ (transitief). Dit is in tegenspraak met het gegeven, dus *niet* $0R3$.

c. Bij elkaar in de klasse 0 en 1, en ook $2, 4$ en 5, mar *niet* 3 en 1. Er zijn meerdere relaties die voldoen. De klassen zijn:

$\{0,1\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3\}$.

$\{0,1,2,4,5\}$, $\{3\}$.

$\{0,1\}$, $\{2,4,5,3\}$.

6a. $a \equiv b \mod m$ als $a - b$ deelbaar is door m, oftewel als a en b dezelfde rest hebben bij deling door m.
Als m zowel $a_1 - a_2$ en $b_1 - b_2$ deelt, dan ook de som $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)$. Maw. $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \mod m$.

b.

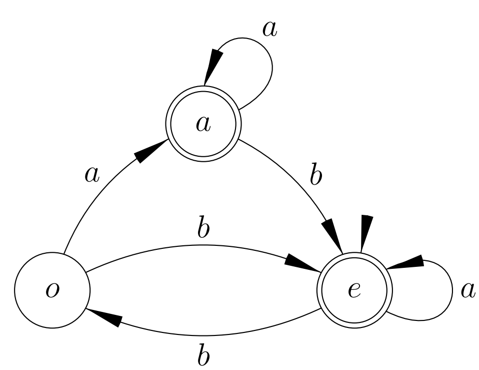
$\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{x}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{x}^3$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

c. Er geldt voor elke gehele n dat $\bar{n}^3 = \bar{n}$ (zie hierboven), oftewel $n^3 \equiv n \mod 6$, dus $n^3 - n \equiv 0 \mod 6$. Met andere woorden rest nul bij deling door 6.

Dit kan ook met inductie. Basis: invullen voor $n = 0$. Inductie: neem aan waar voor n. Kijk naar de formule voor $n+1$: $(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + (3n^2 + 3n)$. Daarin is $n^3 - n$ deelbaar door 3 vanwege de inductie-hypothese en $3n^2 + 3n$ is duidelijk een drievoud. Klaar, hoewel alleen voor niet-negatieve gehelen!

Nóg anders: $n^3 - n = (n+1)n(n-1)$. Van elk drietal opeenvolgende getallen is er tenminste één even, en tenminste één een drievoud, en het product daarom een zesvoud.

7a. De slimste automaat heeft drie toestanden: e voor even aantal b's, o voor oneven aantal b's (laatste letter b), a laatste letter a (bij oneven aantal b).



b. De taal bestaat uit twee gedeeltes, even aantal b's of eindigen op a: $(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* \cup \{a,b\}^*\{a\}$.

HJH dec'03 verbeterd 24.03'04