Gebruik de verzamelingenalgebra om de identiteit $((A \cap B) \cap A) \cup (A \cap B^c) = A$ aan te tonen.

$$
\begin{array}{rcl}
((A \cap B) \cap A) \cup (A \cap B^c) & = & \text{commutatief} \\
(A \cap (A \cap B)) \cup (A \cap B^c) & = & \text{associatief} \\
((A \cap A) \cap B) \cup (A \cap B^c) & = & \text{idempotent} \\
(A \cap B) \cup (A \cap B^c) & = & \text{distributief} \\
A \cap (B \cup B^c) & = & \text{complement} \\
A \cap U & = & \text{éénheid} \\
A & &
\end{array}
$$

†gebruik $X \in \mathcal{P}(V)$ desdals $X \subseteq V$

$\varnothing \in \mathcal{P}(V)$?
ja, want(†) $\varnothing \subseteq V$ (voor alle V)

$\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$?
ja, want $\varnothing$ is deelverzameling van élke verzameling

$\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$?
als(†) $\{\varnothing\} \subseteq V$, dus als $\varnothing \in V$. hangt van V af.

$\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$?
als $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$, en dat geldt altijd (zie boven)

In totaal doen 40 eerstejaars mee aan de tentamens CW, PM en SV. Slechts 10 van hen halen alle drie de vakken, 17 halen CW en PM, 13 halen CW en SV, en 14 halen PM en SV. Het totaal aantal studenten dat CW haalt is 26, bij PM is dat ook 26 en bij SV 18.

Gebruik het *principe van inclusie en exclusie* om het aantal studenten te bepalen dat geen enkel vak haalt.

Voor eindige verzamelingen A, B en C geldt dat $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

haalt tenminste één vak:
$26 + 26 + 18 - 17 - 13 - 14 + 10 = 36$.

geen enkel vak $40 - 36 = 4$.

$X = \{\ (0,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,2),(4,5)\ \}$
op $A = \{0,1,\ldots,5\}$.

Bepaal $X^2 = X \circ X$ en $X \circ X^{-1}$.

X^2, twee takken achter elkaar, bestaat uit:
$(0,2),(0,5),(1,1),(2,2),(3,2),(3,5),(4,1)$.

$X \circ X^{-1}$, tak heen dan tak terug, bestaat uit:
$(0,0),(0,3),(1,1),(1,4),(2,2),(3,0),(3,3),(4,1),(4,4)$.

Stel voor een relatie R geldt dat $R^3 \subseteq R \cup R^2$.
Toon aan dat dan ook geldt dat $R^4 \subseteq R \cup R^2$.

$$
\begin{array}{rl}
R^4 = & \text{definitie} \\
R^3 \circ R \subseteq & \text{gegeven} \\
(R \cup R^2) \circ R = & \text{uitschrijven/distributief} \\
R^2 \cup R^3 \subseteq & \text{gegeven} \\
R^2 \cup (R \cup R^2) = & \text{vereniging} \\
R \cup R^2 &
\end{array}
$$

We bekijken (niet-lege) deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Voor $A \subseteq \mathbb{N}$ is $\min(A)$ het kleinste element van A. Voor (niet-lege) deelverzamelingen A en B van $\mathbb{N}$ geldt de relatie $A \preceq B$ als $\min(A) \leq \min(B)$.
Onderzoek de eigenschappen reflexiviteit, antisymmetrie en transitiviteit voor $\preceq$.

reflexief: $A \preceq A$ (voor elke A)
ok, want $\min(A) \leq \min(A)$

antisymmetrisch: als $A \preceq B$ en $B \preceq A$ dan $A = B$.
nee, bijvoorbeeld $A = \{0\}$ en $B = \{0, 1\}$ dan $\min(A) = \min(B)$ terwijl $A \neq B$

transitief: als $A \preceq B$ en $B \preceq C$ dan $A \preceq C$
ok, want als $\min(A) \leq \min(B)$ en $\min(B) \leq \min(C)$ natuurlijk $\min(A) \leq \min(C)$

De functie $f : A \to B$ is injectief, dat wil zeggen $f(x) \neq f(y)$ als $x \neq y$. Toon aan dat voor elke deelverzameling V van A geldt dat $f^{-1}(f(V)) = V$

$V \subseteq f^{-1}(f(V))$. dit geldt altijd.
kies $x \in V$, we beredeneren dat $x \in f^{-1}(f(V))$. laat $y = f(x)$ (dus $(x, y) \in f$). dan $y \in f(V)$ en ook $x \in f^{-1}(f(V))$.

$f^{-1}(f(V)) \subseteq V$.
kies $x \in f^{-1}(f(V))$, we beredeneren dat $x \in V$. omdat $x \in f^{-1}(f(V))$ kunnen we een $y \in f(V)$ vinden met $x \in f^{-1}(y)$ oftewel $f(x) = y$. omdat $y \in f(V)$ is er een $z \in V$ met $y = f(z)$. gebruik dat f injectief is, x en z worden afgebeeld op y, dus moet $x = z$ maar $z \in V$ (wat we wilden weten)

Geef een bijectieve functie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

maak ruimte voor de negatieve getallen

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
\mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\
\hline
\mathbb{Z} & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\
 & & -1 & & -2 & & -3 & & -4 & & \ldots
\end{array}$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{als } x \text{ even} \\ -\frac{1}{2}(x+1) & \text{als } x \text{ oneven} \end{cases}$$

opgavenbundel

Stel een samenhangende graaf G bevat tak e die op een een cykel ligt.
Beredeneer dat de graaf $G-e$ nog steeds samenhangend is.

Neem twee knopen x en y. Omdat G samenhangend is, is er een pad π van x naar y in G. Als dit pad de lijn e niet bevat, is π ook een pad in $G - e$, en zijn x en y nog verbonden. Anders voldoet π niet. Omdat e op een kring ligt, worden de uiteinden van e nog door een ander pad verbonden, dat e niet bevat. Als we in π de enkele lijn e door dit pad vervangen, vinden we een nieuw pad in $G - e$ dat x en y weer verbindt.

jan 2008 & jan 2009

$G = (V, E)$ is een samenhangende graaf met n knopen. Minimale en maximale aantal lijnen e van G?

$n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$. De ondergrens geldt voor een boom, een minimaal verbonden graaf (lijn minder dan knopen), de bovengrens bevat een lijn tussen elk tweetal knopen (dus 2 kiezen uit n).

jan 2008 & jan 2009

De expressie $\oplus \ominus \oplus 1 \oplus 2\ 3 \oplus \ominus \oplus 4\ 5\ 6 \ominus 7\ 8\ 9$ is in preorde notatie (Poolse notatie), waarbij $\oplus$ en $\ominus$ binaire bewerkingen zijn. Teken de bijbehorende boom.

zoek (van achternaarvoor) twee argumenten bij elke operator

$\oplus \ominus \oplus 1(\oplus 2\ 3) \oplus \ominus(\oplus 4\ 5)\ 6(\ominus 7\ 8)\ 9$
$\oplus \ominus (\oplus 1(\oplus 2\ 3)) \oplus (\ominus(\oplus 4\ 5)\ 6)(\ominus 7\ 8)\ 9$
$\oplus(\ominus(\oplus 1(\oplus 2\ 3))(\oplus(\ominus(\oplus 4\ 5)\ 6)(\ominus 7\ 8)))\ 9$
$(\oplus(\ominus(\oplus 1(\oplus 2\ 3))(\oplus(\ominus(\oplus 4\ 5)\ 6)(\ominus 7\ 8)))\ 9)$

Nu staan bij elke operator twee argumenten, dat is de boomstructuur.

Welke mogelijke waarden kan de uitdrukking $4*5+3-2$ krijgen door er haakjes in te zetten? Geef voor elke uitdrukking een bijpassende postorde notatie.

symmetrisch/infix, resp. postfix

$((4*5)+3)-2=21$	$4\,5*3+2-$
$(4*(5+3))-2=38$	$4\,5\,3+*2-$
$(4*5)+(3-2)=21$	$4\,5*3\,2-+$
$4*((5+3)-2)=24$	$4\,5\,3+2-*$
$4*(5+(3-2))=24$	$4\,5\,3\,2-+*$