Toets Fundamentele Informatica 1 **19 oktober 2015, 14.00–16.00**

Deze toets bestaat uit tien opgaven. *Geef steeds voldoende uitleg.* Succes!

1) Teken een Venn diagram voor elk van de onderstaande uitdrukkingen. Leg uit en schrijf ze vervolgens met behulp van de Boolese operaties $\cup, \cap, {}^c$ (dus zonder symmetrisch verschil $\oplus$).

$A \oplus B$, $A \oplus A$, en $A \oplus (B \oplus A)$

2) Gebruik de regels van de verzamelingenalgebra om de volgende gelijkheid aan te tonen:

$$(A \cap B^c) \cup ((A^c \cap B) \cup (A \cap B)) = A \cup B$$

Tip. Het gedeelte tussen haakjes eerst vereenvoudigen tot B.

3) Gegeven is de matrix $M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Geef het pijldiagram en de gerichte graaf van de relatie R_M gerepresenteerd door M.

Bepaal de matrix bij de relatie $R_M \circ R_M$.

4) $R \subseteq A \times B$ is een injectieve relatie. Beredeneer dat $R = R \circ R^{-1} \circ R$.

Geef een voorbeeld van een relatie R op $A = B = \{1, 2, 3\}$ waarin $R \neq R \circ R^{-1} \circ R$.

5) Bedenk $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$.

De relatie $\prec \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ wordt gegeven door: $a \prec b$ desdals $b = a^n$ voor een of andere $n \in \mathbb{N}$. Dus bijvoorbeeld $2 \prec 4$ maar $3 \not\prec 6$ want 6 is geen macht van 3.

Is $\prec$ reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief?

Is $\prec$ een equivalentierelatie, een partïele ordening of geen van beide?

6) Laat $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$ en $C = \{r, s, t\}$. Laat de functies $f : A \to B$ en $g : B \to C$ gedefinieerd zijn door:

$f = \{\ (a, y), (b, x), (c, y)\ \}$ en $g = \{\ (x, s), (y, t), (z, r)\ \}$.

Bepaal de compositie $g \circ f : A \to C$ en geef het bereik van de functies f, g en $g \circ f$.

7) Bereken $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$ voor $n \geq 1$.

8) Een 'driehoek' in een ongerichte graaf is een cykel op drie knopen.

Geef een graaf met zes knopen en (tenminste) negen lijnen die géén driehoek heeft.

9) Laat zien: Als er in de ongerichte graaf G twee verschillende simpele paden van knoop u naar knoop v gaan, dan heeft G een cykel.

10) Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \geq 1$ het aantal lijnen $\ell(n)$ in de complete [=volledige] graaf K_n gelijk is aan $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

Dus, geef de basisstap, formuleer de inductiehypothese, en bewijs de inductiestap.