Toets Fundamentele Informatica 1 **24 oktober 2014, 11.00–13.00**

Deze toets bestaat uit tien opgaven. *Geef steeds voldoende uitleg.* Succes!

1) Laat met Venn diagrammen zien dat doorsnede distribueert over symmetrisch verschil:

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

2) Hoeveel elementen bevat $\{+, -\} \times \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$?
Geef drie van die elementen.

3) Symmetrisch verschil kunnen we schrijven als $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ maar ook als $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Gebruik de verzamelingenalgebra om te laten zien dat deze verzamelingen gelijk zijn, laat dus zien dat

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^C = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C).$$

4) Gegeven is de relatie $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}$ op $\{a, b, c, d\}$.

Bepaal $R^2 = R \circ R$ en $R^3 = R^2 \circ R$. Wat is de transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$?

5) Bekijk de relatie $<$ op $\mathbb{N}$. Is de relatie reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief?

6) Beredeneer: als $f : A \to B$ en $g : B \to C$ injectief zijn, dan is de samengestelde functie $g \circ f : A \to C$ (g na f) dat ook.

Geldt de omgekeerde bewering ook (dus, als de samenstelling injectief is dan moeten f en g dat ook zijn)?

7) In deze opgave proberen we de sommatie-formule voor meetkundige reeksen af te leiden. De som S_n is gelijk aan $S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k$.

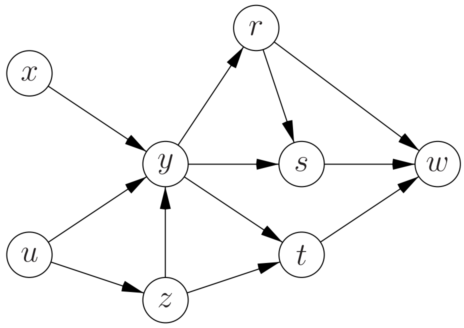
Schrijf $3S_n = 3 \sum_{k=0}^{n} 3^k$ als vergelijkbare som van machten van 3.

Wat is nu een simpele uitdrukking voor het verschil $2S_n = 3S_n - S_n$?

8) Teken de grafen K_5, $K_{3,3}$ en $K_{2,3}$.

Geef voor elk van de grafen een (gesloten) Euler trail of leg uit waarom dat niet bestaat. Als er geen Euler trail is, is er dan een Euler pad (waar begin- en eindknoop niet gelijk hoeven te zijn)?

9) Een *topologische ordening* van een gerichte graaf $G = (V, E)$ is een volgorde $v_1, \ldots, v_n$ van alle knopen van G zó dat als $(v_i, v_j) \in E$, dan $i < j$. (Je kunt de knopen van de graaf op een lijn tekenen waarbij alleen pijlen van de graaf van links naar rechts lopen.) Geef een topologische sortering van onderstaande gerichte graaf.



10) Neem aan dat G een cykelvrije gerichte (eindige) graaf is. Beargumenteer dat G een put heeft.