Dit tentamen bestaat uit 20 onderdelen die elk goed zijn voor 0,5 punt. Wanneer bij een vraag om tussenresultaten of om uitleg of motivatie van je antwoord wordt gevraagd, is het belangrijk dat je die ook geeft.

1. Toon aan (bijvoorbeeld met behulp van een Venn-diagram) dat voor verzamelingen A, B, C geldt, dat $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2. Deze opgave gaat over (onder andere) machtsverzamelingen. De machtsverzameling $P(V)$ van een verzameling V is gedefinieerd als de verzameling van alle deelverzamelingen van V.

   (a) Geef een voorbeeld van een verzameling V, waarbij zowel $\emptyset$ als $\{\emptyset\}$ in de machtsverzameling $P(V)$ zit. Wat is $P(V)$ in dit geval?

   (b) Toon aan dat voor een eindige verzameling V met n elementen de machtsverzameling $P(V)$ precies 2^n elementen bevat.

   (c) Laat met behulp van een diagonalisatie-argument zien dat de machtsverzameling $P(\mathbb{N})$ niet aftelbaar is.

   (d) De machtsverzameling $P(\mathbb{N})$ uit het vorige onderdeel is een oneindige verzameling van deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. We kijken nu naar een andere oneindige verzameling van deelverzamelingen van $\mathbb{N}$:

   $$V = \Big\{\{0,1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \ldots\Big\} = \Big\{\{i, i+1, i+2\} | i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

   Waarom werkt een diagonalisatie-argument als in het vorige onderdeel niet om aan te tonen dat V niet aftelbaar is?

3. De eerste drie onderdelen van deze opgave gaan over de concrete relatie

   $$X = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

   (a) Teken X als gerichte graaf. Bepaal ook X^{-1}.

   (b) Is de relatie X reflexief? Is de relatie X symmetrisch? Is de relatie X anti-symmetrisch? Motiveer je antwoorden.

   (c) Bepaal de transitieve afsluiting van de relatie X.

   (d) Geef een voorbeeld van een relatie R op $\{1,2,3,4\}$ die zowel symmetrisch als anti-symmetrisch is. Geef ook een voorbeeld van een relatie R op $\{1,2,3,4\}$ die noch symmetrisch, noch anti-symmetrisch is.

   (e) Stel dat voor een willekeurige relatie R geldt dat $R^3 \subseteq R \cup R^2$. Toon aan dat dan ook $R^4 \subseteq R \cup R^2$.

4. Een binaire boom van hoogte 1 bestaat uit een enkele knoop.

   (a) Teken binaire bomen van hoogtes 2, 3 en 4 met zoveel mogelijk knopen.

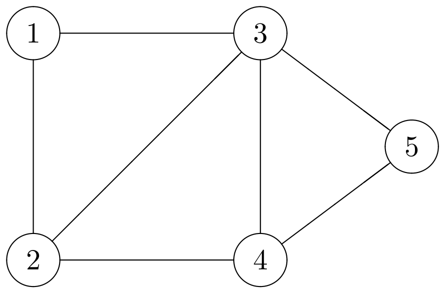
   (b) Een binaire boom van hoogte $h \geq 1$ bestaat uit een wortel, met een subboom van hoogte $h-1$ en een tweede subboom van maximaal hoogte $h-1$ (de tweede subboom kan ook hoogte 0 hebben, d.w.z.: leeg zijn).

   Bewijs met inductie dat het aantal knopen in een binaire boom van hoogte h maximaal $2^h - 1$ is (voor elke $h \geq 1$).

5. (a) Bereken voor $x = 0, 1, 2, 3, 4$ de waarde van x^2, x^3 en x^4 modulo 5.
   (b) Voor welke natuurlijke getallen x geldt dat $x^{23} + x^{17}$ deelbaar is door 5? Motiveer je antwoord.

6. (a) Hoe kunnen we aan een willekeurige matrix zien dat de bijbehorende (multi-)graaf ongericht is? Dat de bijbehorende multigraaf gewoon een graaf is? Dat de bijbehorende relatie totaal is?
   (b) Beschouw de volgende graaf G:

   G:



   Is G een Euler-graaf? Motiveer je antwoord.

   Bestaat er in G een pad waarin elke lijn in G precies één keer voorkomt? Zo ja, geef zo'n pad; zo nee, waarom niet?

7. De eerste drie onderdelen van deze opgave gaan over de volgende taal K:

$$K = \Big\{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s en eindigt op } ba \Big\}.$$

   (a) Geef alle elementen w van K, waarvoor $|w| \leq 4$.
   (b) Toon aan dat de taal K regulier is, d.w.z.: druk K uit in eindige talen m.b.v. de operaties vereniging, concatenatie en ster $(\cup, \cdot, *)$.
   (c) Geef een deterministische eindige automaat voor de taal K.
   (d) Geef een deterministische eindige automaat voor de volgende taal L:

$$L = \Big\{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ bevat een oneven aantal } a\text{'s } \textit{of} \text{ eindigt op } ba \Big\}.$$

   Als het je niet lukt om een deterministische eindige automaat voor L te construeren, kun je maximaal 0,3 punt verdienen met een niet-deterministische eindige automaat voor L.