Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

**1)**
**a.** Schrijf het verschil $A \backslash B$ met behulp van doorsnede en complement.

**b.** Laat met behulp van Venn diagrammen zien dat $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
Geef duidelijk aan wat al uw arceringen voorstellen.

**c.** Laat met behulp van de verzamelingenalgebra zien dat $(A \cup B) \backslash A = B \backslash A$.
Herschrijf eerst de operator \ als hierboven. Benoem de gebruikte regels.

**2)** De machtsverzameling van $X$ wordt genoteerd als $\mathcal{P}(X)$. Laat $A$ en $B$ verzamelingen zijn, en $C$ een alfabet (eindige verzameling).

**a.** Geef een notatie voor de verzameling van alle relaties van $A$ naar $B$, en een voor de verzameling van alle talen over $C$.

**3)** Op $\{1, 2, 3, 4\}$ is de relatie $R$ gegeven door $\{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$.

**a.** Geef $R$ als matrix, en teken $R$ als gerichte graaf.

**b.** Bepaal $R^2$ en $R \circ R^{-1}$ (relatie volgorde).

**c.** Is $R$ totaal? Surjectief? Injectief? (leg uit)

**4)** We bekijken de bekende *reguliere expressies* over een alfabet $\Sigma$. Deze hebben de constante $a$ voor $a \in \Sigma$, binaire operatoren $\cup$ en $\cdot$, en een unaire operator $*$, gegeven van lage naar hoge prioriteit. De binaire operatoren worden tussen de argumenten geschreven 'infix', de unaire operator achter zijn argument 'postfix'.

**a.** Teken de boom die de expressie $a \cup a \cdot (b \cdot a)*$ representeert.

De operatie mir op reguliere expressies wordt recursief gedefinieerd door $\mathrm{mir}(a) = a$ voor $a \in \Sigma$, en $\mathrm{mir}(K \cup L) = \mathrm{mir}(K) \cup \mathrm{mir}(L)$, $\mathrm{mir}(K \cdot L) = \mathrm{mir}(L) \cdot \mathrm{mir}(K)$, $\mathrm{mir}(K*) = (\mathrm{mir}(K))*$ voor reguliere expressies $K$ en $L$.

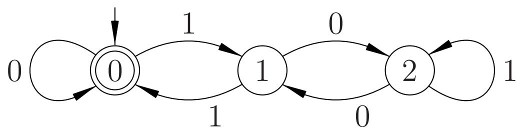
**b.** Bepaal met deze regels $\mathrm{mir}(\, a \cup a \cdot (b \cdot a)* \,)$ en teken de boom voor de gevonden expressie.

**c.** Beschrijf in woorden hoe in het algemeen de boom voor $\mathrm{mir}(K)$ bepaald kan worden uit de boom voor $K$.

**5)** Neem de functie val : $\{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ die aan elke string zijn waarde geeft (gelezen als binair getal). Bijvoorbeeld $\mathrm{val}(11) = 3$ en $\mathrm{val}(1001) = 9$. Voor de volledigheid $\mathrm{val}(\lambda) = 0$.

**a.** Druk $\mathrm{val}(xa)$ uit in $\mathrm{val}(x)$ voor $x \in \{0,1\}^*$ en $a \in \{0,1\}$.

Bekijk onderstaande eindige automaat $\mathcal{A}$.




**b.** Bewijs met inductie dat $L(\mathcal{A}) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \mathrm{val}(w) \equiv 0 \bmod 3\}$.

**6)** **a.** Bereken voor $x = 0, 1, 2, 3, 4$ de waarde van $x^2$, $x^3$, en $x^4$ modulo 5.

**b.** Voor welke natuurlijke getallen $x$ geldt dat $x^{23} + x^{16}$ deelbaar is door 5?

**7)** Deze opgave gaat over ongerichte grafen

**a.** Wanneer is een graaf samenhangend?
Wanneer is een samenhangende graaf een boom?

**b.** Wat is het minimale en maximale aantal lijnen in een samenhangende graaf met $n$ knopen?

**c.** Als $G$ samenhangend is en het verwijderen van lijn $e$ verbreekt de samenhang niet, dan moet $e$ op een cykel liggen. Leg dit uit.

**8)** Gegeven is de taal

$$K = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ heeft even lengte, en eindigt op } b\}$$

**a.** Beredeneer dat $K^2 \subset K$. (strict)

**b.** Laat zien dat $K$ regulier is (dus druk $K$ uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster).

**c.** Geef een deterministische eindige automaat voor $K$.