Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

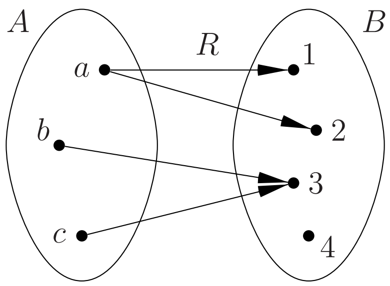
1) **a.** Schrijf het verschil $A - B$ met behulp van vereniging $\cup$ en complement ^{c}.
Gebruik een Venndiagram om de uitdrukking $A - (A - B)$ te vereenvoudigen.

b. Herschrijf $A - (A - B)$ tot de gevonden eenvoudige uitdrukking met behulp van de regels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.

c. Stel u weet van de bewerkingen $\cup$, $\cap$ en ^{c} alleen *distributiviteit*, de *complementregels* ($A \cup A^c = U$ en $A \cap A^c = \varnothing$), en de regels voor *nul en één* ($A \cup \varnothing = A$ en $A \cap U = A$).
Laat zien dat *idempotentie* $A \cap A = A$ daaruit volgt, door $A \cap (A \cup A^c)$ op twee manieren te vereenvoudigen.

2) Als $R \subseteq A \times B$ dan definiëren we (net als bij functies) voor $X \subseteq A$ het beeld van X onder R als $R(X) = \{\ y \in B \mid xRy \text{ voor een } x \in X\ \}$.

a. Kies nu $A = \{\ a, b, c\ \}$ en $B = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}$. De relatie $R \subseteq A \times B$ is gegeven door een pijldiagram.



Voor $X = \{\ a, c\ \}$, bepaal $R(X)$ en $R^{-1}(R(X))$.
Bepaal $R \circ R^{-1} \subseteq A \times A$ (*relatie-volgorde*).

b. Laat nu $R \subseteq A \times B$ een relatie zijn met $\text{dom}(R) = A$. Bekijk weer de relatie $S = R \circ R^{-1}$ (algemeen, niet speciaal het voorgaande voorbeeld).
Laat zien dat S reflexief en symmetrisch is.
Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat S niet altijd transitief hoeft te zijn.

c. Als R en S twee relaties in $A \times A$ zijn, dan zijn ook $R \cup S$ en $R \cap S$ dat.
Als R en S transitief zijn, geldt dat dan ook voor $R \cup S$ en voor $R \cap S$?

3) **a.** Geef een recursieve definitie van pre-ordening voor binaire bomen.

b. Van een binaire boom T zijn de knopen in pre-ordening op alfabetische volgorde gegeven: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ (inderdaad J ontbreekt).
De symmetrische ordening van de knopen van T is $C, B, D, F, E, G, A, H, K, I$.
Reconstrueer de boom T (en teken er een plaatje van). (*hint:* wat is de wortel?)

c. Als de pre-ordening van een boom net als boven gelijk is aan $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, kan de symmetrische ordening dan elke willekeurige permutatie van deze letters zijn?

4) $$\sum_{i=0}^{n}(i+2)\cdot 2^i = (n+1)\cdot 2^{n+1}$$

a. Schrijf bovenstaande gelijkheid uit voor $n = 0$ en voor $n = 3$ en verifieer dat de beide gevallen kloppen.

b. Bewijs de gelijkheid met inductie.

5) **a.** Wanneer heet een (ongerichte) graaf bipartiet?

b. Leg uit dat elke boom bipartiet is.

c. Beredeneer dat een boom met n knopen precies $n - 1$ lijnen moet hebben.

6) **a.** Bereken de getallen x^2 modulo 12, voor $x = 1, 2, \ldots, 11$.

b. Als je het goed gedaan hebt, is deze reeks kwadraten modulo 12 symmetrisch (achterstevoren zien we dezelfde reeks). Waarom geldt dat?

c. Bepaal de rest van $9^{71} + 8^{132}$ bij deling door 12.

7) In het woord $w = abbbaab$ komt de letter a voor op posities 1,5 en 6. Een woord heet *stoer* als elke a of op oneven positie staat, of volgt op een andere a (of allebei). Dus w is stoer (en λ ook), maar *baabbba* niet. Laat $K = \{w \in \{a, b\} \mid w \text{ is stoer }\}$.

a. Beredeneer dat $(ab)^* \subseteq K$, maar $(aba)^* \not\subseteq K$.

b. Geef een eindige automaat voor K.

c. Er geldt $K = \{aa, ab, bb\}^* \cdot \{a, b, \lambda\}$. Leg dit uit.