Fundamentele Informatica 1 **9 augustus 2011, 10–13 u.**

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal 20 onderdelen die elk 0.5 punt waard zijn. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) De verzamelingsoperatie symmetrisch verschil noteren we met $\oplus$.

a. Voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we de verzameling $A_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$.
Bepaal $\bigoplus_{n=1}^{5} A_n$.

b. Bewijs de distributiviteit van $\cap$ over $\oplus$:
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c. Distribueert $\cup$ over $\oplus$:
$A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$?

2) De relatie R op $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ bestaat uit de paren $(1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,3)$.

a. Teken R als gerichte graaf, en geef de matrix-representatie van R.

b. Bepaal R^2, R^3, en $R \circ R^{-1}$ [in de 'relatievolgorde' eerst R dan R^{-1}].

c. Geldt voor de reeks relaties R^n, $n \in \mathbb{N}$, dat deze vanaf zeker moment constant is; dat wil zeggen, er bestaat een N zodat alle R^n, $n \geq N$, gelijk aan elkaar.

3) Hier zijn $\cap$ en $\cup$ binaire operaties (eerst nog zonder betekenis).

a. De expressie $\cap \cup 1 \cup 2\ 3 \cup 3\ 4$ is in preorde notatie (Poolse notatie).
Teken de bijbehorende boom, de cijfers in de bladeren.

b. Nummer de knopen van uw boom volgens postordening.
Wandel langs de knopen van de boom (in postorde) en bereken de waarde bij elke knoop. Hierbij zijn $\cup$ en $\cap$ respectievelijk de bewerking vereniging en doorsnede; elk blad met cijfer x krijgt de waarde $\{x\}$.

c. Beschrijf een functie die de *hoogte* van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* $f(\text{blad})$ en *recursie* $f(\text{knoop})$ uitgedrukt in $f(\text{links})$ en $f(\text{rechts})$.
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen.)

4) We bekijken twee talen.
De taal L wordt gespecificeerd door de volgende regels:

1. $a \in L$.
2. als $x \in L$ dan $xb \in L$.
3. als $x \in L$ en $y \in L$ dan $xya \in L$.

De taal K_{on} bestaat uit alle woorden over $\{ a, b \}$ die een oneven aantal a's bevatten.

a. Bewijs met inductie dat $L \subseteq K_{on}$.

b. Leg uit dat L en K_{on} niet gelijk aan elkaar zijn.

c. Geef een recursieve definitie van K_{on}, met enige uitleg om aan te geven waarom deze definitie wèl K_{on} vastlegt.

5) Met $\mathcal{P}(V)$ geven we de machtsverzameling van de verzameling V aan.
We noemen hier een deelverzameling A van $\mathbb{N}$ *bont* als zowel A als het complement $\mathbb{N} - A$ oneindig veel elementen bevatten.

a. Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die injectief is (alle beelden verschillend) en waarvan bovendien elke $f(x)$ een bonte verzameling is.

b. Laat $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ een (willekeurige) functie zijn, en kies de verzameling
$A = \{ x \in V \mid x \notin f(x) \}$.
Beredeneer dat er geen $a \in \mathbb{N}$ is met $f(a) = A$. (*diagonalisatie*)

c. Als we f kennen, is $B = \{ x \in V \mid x \in f(x) \}$ (het complement van A uit het vorige onderdeel). Verander de functie f uit onderdeel **a.** zo dat $f(0) = B$.
(Je hoeft niet B expliciet te berekeken als dat lastig is; het is voldoende om de methode aan te geven die je zou kunnen gebruiken.)

6) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf samenhangend [= *connected*] ?
Wanneer is een samenhangende graaf een boom?

b. Stel een samenhangende graaf G bevat tak e die op een een cykel ligt.
Beredeneer dat de graaf $G - e$ nog steeds samenhangend is.

7) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ eindigt op een 1 en heeft niet 00 als deelwoord } \}$$

b. Geef een omschrijving voor het complement van K ten opzichte van $\{0,1\}^*$, dwz. van de vorm $K^c = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \cdots \}$.

c. Toon aan dat het complement van K *regulier* is, maw. druk de taal uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).