Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Beredeneer dat voor verzamelingen A en B geldt $(A \cup B) \cap A^c = B \cap A^c$, gebruikmakend van de regels van de verzamelingenalgebra.
Benoem de regels die u gebruikt.

b. Geef de duale bewering van $(A \cup B) \cap A^c = B \cap A^c$.
Waarom geldt deze duale bewering ook?

c. Beschouw het universum $\mathcal{U}$ dat bestaat uit alle relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$.
Bijvoorbeeld $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ is een element van $\mathcal{U}$.
De verzameling $\mathcal{T}$ bestaat uit alle transitieve relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$, de verzameling $\mathcal{S}$ uit alle symmetrische relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$. Teken een Venn diagram met $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ en geef (zo mogelijk) voor elk gebied een element dat tot dat gebied behoort.

2) De relatie R op $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ bestaat uit de paren $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 2)$.

a. Teken R als gerichte graaf, en geef de matrix-representatie van R.

b. Bepaal R^2 en $R \circ R^{-1}$ [in de 'relatievolgorde' eerst R dan R^{-1}].

c. Bepaal de transitieve afsluiting van R.

3) **a.** Wanneer heet een verzameling aftelbaar?

b. Bewijs dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de machtsverzameling van de natuurlijke getallen, niet aftelbaar is.

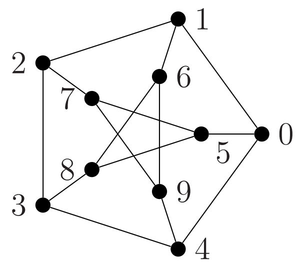
4) Gegeven is onderstaande functie.

```
void fibo(int depth) {
  switch (depth) {
    case 0:  cout << 'b'; return;               // depth 0
    case 1:  cout << 'a'; return;               // depth 1
    default: fibo(depth - 1); fibo(depth - 2);  // anders
  } //switch
} //fibo
```

a. Wat drukt `fibo(4)` af?
Teken een boomstructuur die de functieaanroepen weergeeft, met getallen in de interne knopen (de parameter `depth`) en met symbolen `a` en `b` in de bladeren.

b. Bewijs, met inductie naar $n \in \mathbb{N}$, dat `fibo(`n`)` ten hoogste 2^n symbolen print.

5) Onderstaande graaf is de Petersen-graaf.



a. Geef een cykel van lengte zes in de Petersen-graaf.
Geef ook een cykel van lengte negen (of acht).

b. De graaf G heeft tien knopen die precies de verzamelingen van twee elementen uit $\{0,1,2,3,4\}$ zijn. De graaf heeft lijnen tussen knopen die geen element gemeenschappelijk hebben.
Bijvoorbeeld $\{\,\{0,3\},\{2,4\}\,\}$ is een lijn van G.
Formeel is dus $G=(V,E)$, met $V=\{\ X\subset\{0,1,2,3,4\}\mid |X|=2\ \}$ en
$E=\{\ \{X,Y\}\mid X\cap Y=\varnothing\ \}$
Teken G.

c. De hierboven beschreven graaf G heeft dezelfde structuur als de Petersen-graaf.
Geef een isomorfisme tussen beide grafen.

6) **a.** Een relatie heet een partiële ordening als zij reflexief, antisymmetrisch en transitief is. Wat betekenen deze begrippen?

Het begrip interval kent u van de middelbare school: $[\,a,b\,]=\{\ x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\ \}$.

We definieren relatie $\triangleleft$ tussen intervallen als het tweede interval als het ware in het verlengde ligt van het eerste (overlap toegestaan):
$[\,a,b\,]\triangleleft[\,c,d\,]$ geldt als $[\,a,b\,]\cup[\,c,d\,]=[\,a,d\,]$.

b. Ga elk van de drie eigenschappen van partiële ordening na voor deze relatie $\triangleleft$.

c. Definieer zelf een partiële ordening op intervallen.

7) **a.** Wanneer is een eindige automaat deterministisch?

Gegeven is de taal

$$L=\{\ w\in\{a,b\}^*\mid w \text{ heeft precies twee } a\text{'s, of } w \text{ eindigt met een } b\ \}$$

b. Lat zien dat L regulier is, dus druk L uit in eindige talen met behulp van de reguliere operaties $\cup$, $\cdot$, *.

c. Geef een deterministische eindige automaat voor L.