Dit tentamen bestaat uit in totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Vereenvoudig $(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)$, gebruikmakend van rekenregels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.

b. Formuleer het *counting principle*, oftewel het *principe van inclusie en exclusie*, voor het tellen van het aantal elementen in de vereniging $A \cup B \cup C$ van drie verzamelingen.

c. Bereken het aantal elementen in het cartesisch product $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \times \{\mathtt{T}, \mathtt{F}\} \times \{a, b, \ldots, y, z\}$ waar of de eerste component even is, of de tweede component `T`, of de derde component een klinker (a, e, i, o, u) – eventueel gecombineerd.

2) De relatie R op $\{a, b, c, d\}$ wordt gerepresenteerd door de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Teken R als gerichte graaf.

b. Geef de matrix behorend bij de relatie $R \circ R$, en bij de relatie $R^{-1} \circ R$.

c. Hoe zien we aan een willekeurige matrix dat de bijbehorende graaf ongericht is?
Dat de bijbehorende (multi-)graaf geen lussen heeft?
Dat de bijbehorende relatie functioneel is?

d. Geef de matrix behorend bij de transitieve afsluiting van de relatie R.

3) **a.** Geef een recursieve definitie van pre-ordening voor binaire bomen.

b. Van een binaire boom T zijn de knopen in pre-ordening op alfabetische volgorde gegeven: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ (inderdaad J ontbreekt).
De symmetrische ordening van de knopen van T is $D, C, B, F, G, E, A, H, K, I$.
Reconstrueer de boom T (en teken er een plaatje van).

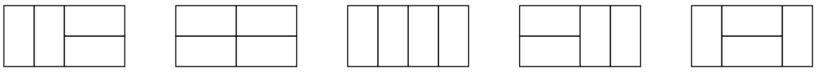
c. Als de pre-ordening van een boom net als boven gelijk is aan $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, kan de symmetrische ordening dan elke willekeurige permutatie van deze letters zijn?

4) Zoals bekend worden de Fibonacci getallen gegeven door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en voor $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

a. Bereken $\sum_{k=0}^{n} F_k$ voor $n = 1, \ldots, 6$.

b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ voor $n \geq 0$.

c. Beredeneer: het aantal manieren om een $2 \times n$-bord met 1×2 domino's vol te leggen voldoet aan dezelfde recurrente betrekking als die van de Fibonacci getallen.



plaatje: bij $n = 4$ zijn er vijf mogelijkheden.

5) **a.** Een relatie heet een equivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is. Wat betekenen deze begrippen?

Het begrip interval kent u van de middelbare school: $[\,a, b\,] = \{\ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\ \}$.

We definieren een relatie $\triangleleft$ op intervallen die als het ware in elkaars verlengde liggen (overlap toegestaan): $[\,a, b\,] \triangleleft [\,c, d\,]$ geldt als $[\,a, b\,] \cup [\,c, d\,] = [\,a, d\,]$.

b. Ga de drie eigenschappen van equivalentie na voor deze relatie $\triangleleft$.

c. Definieer zelf een equivalentierelatie op intervallen (maar anders dan het flauwe 'gelijkheid').

6) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Als G een samenhangende graaf is met n knopen, wat is dan het minimale en het maximale aantal lijnen van G?

b. Een lijn e van een samenhangende graaf G heet een *brug* als $G - e$ niet langer samenhangend is. Beredeneer: een lijn e is een brug desdals e niet op een cykel van G ligt.

7) Gegeven is de taal

$$L = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft subwoord } aba \text{ of eindigt op een } b\ \}.$$

a. Laat zien dat L regulier is, dus druk L uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging $\cup$, concatenatie $\cdot$ en ster *.

b. Geef een deterministische eindige automaat voor L.