Dit tentamen bestaat uit zes opgaven, met totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) De verzamelingsoperatie *symmetrisch verschil* noteren we met $\oplus$.

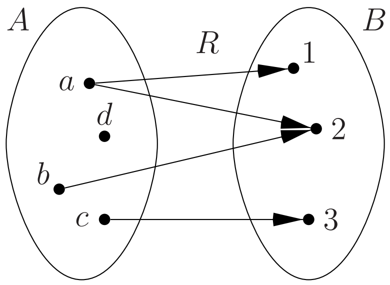
a. Voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we de verzameling $A_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$.
Bepaal $\bigoplus_{n=1}^{5} A_n$.

b. Bewijs de distribitiviteit van $\cap$ over $\oplus$:
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c. Distribueert $\cup$ over $\oplus$:
$A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

2) Voor de zekerheid geven we een bekende definitie voor relaties.
Als $R \subseteq U \times V$ en $X \subseteq U$ dan is $R(X) = \{\ y \in V \mid xRy \text{ voor een } x \in X\ \}$.

Laat $A = \{\ a, b, c, d\ \}$ en $B = \{\ 1, 2, 3\ \}$. De relatie $R \subseteq A \times B$ is gegeven door een plaatje.



a. Voor $X = \{\ b, c\ \}$ bepaal $R(X)$ en $R^{-1}(R(X))$. Bepaal $R \circ R^{-1}$.

b. Is deze R functioneel, dan wel injectief, surjectief, of totaal?
Zo nee, welke takken zouden toegevoegd kunnen worden om de relatie deze eigenschap te geven?

c. Voor willekeurige $R \subseteq U \times V$, is de samenstelling $R \circ R^{-1}$ niet altijd een reflexieve relatie op U. Geef een eenvoudige voorwaarde op R waaronder dat wél het geval is.

3) $\vee$ en $\wedge$ zijn binaire bewerkingen op Boolese waarden (t=*true* en f=*false*).

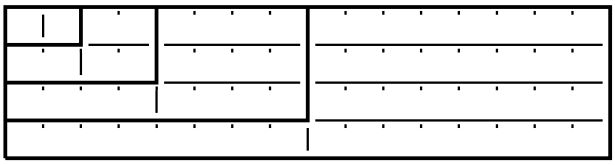
a. De expressie $\vee \wedge \wedge\ f \vee t\ f \wedge t\ t\ f$ is in preorde notatie (Poolse notatie).
Teken de bijbehorende boom.

b. Nummer de knopen van uw boom volgens postordening.
Wandel langs de knopen van de boom (in postorde) en bereken de waarde bij elke knoop. Hierbij zijn $\vee$ en $\wedge$ zoals gewoonlijk respectievelijk de bewerking *or* en *and*.

c. Beschrijf een functie die het aantal bladeren van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* f(blad) en *recursie* f(knoop) uitgedrukt in f(links) en f(rechts).
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen).

4) $$\sum_{i=0}^{n}(i+2)\cdot 2^i = (n+1)\cdot 2^{n+1}$$

a. Schrijf bovenstaande gelijkheid uit voor $n = 3$. (Narekenen is niet nodig.)
Laat zien dat de linkerzijde van de formule de oppervlakte van onderstaand 4×16 plaatje bepaalt door 'balkjes' te tellen.



b. Bewijs de gelijkheid met inductie.

5) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf bipartiet ? Teken de graaf $K_{3,3}$.

b. Noem het aantal knopen in een bipartiete graaf n en het aantal takken e. Wat is de grootste waarde die e kan aannemen, uitgedrukt in n?

c. Stel G is een bipartiete graaf. Beredeneer dat G alleen cykels van even lengte heeft.

d. Laat $V_n = \{0,1\}^n$ de verzameling strings over $\{0,1\}$ zijn met lengte n. Neem V_n als verzameling knopen, en verbind x en y door een lijn als x en y precies één symbool verschillen. Beredeneer dat de graaf die ontstaat bipartiet is.
Opm. voor $n = 3$ ontstaat een kubus.

6) K is een taal over alfabet Σ.

a. Beredeneer: als $K = K^2$ dan $\lambda \in K$.

b. Beredeneer: als $K = K^2$ dan $K = K^*$.

7) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{\ w \in \{a,b\}^* \mid \text{de eerste en laatste letter van } w \text{ zijn gelijk}\ \}$$

Om misverstanden te voorkomen spreken we af dat $\lambda \notin K$ terwijl $a, b \in K$.

b. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).