Dit tentamen bestaat uit zes opgaven, met totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) De verzamelingsoperatie symmetrisch verschil noteren we met $\oplus$.

a. Voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we de verzameling $A_n = \{n, n+1, \dots, 2n\}$.
Bepaal $\bigoplus_{n=1}^{5} A_n$.

b. Bewijs de distribitiviteit van $\cap$ over $\oplus$:
$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

c. Distribueert $\cup$ over $\oplus$:
$A \cup (B \oplus C) = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$?

2) Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we de *samenstelling* van R en S als

$$R \circ S = \{ \ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \ \}.$$

a. Gegeven is nu de concrete relatie X op $A = \{0, 1, \dots, 5\}$ als

$$X = \{ \ (0,4), (1,2), (2,1), (3,4), (4,2), (4,5) \ \}$$

Bepaal $X^2 = X \circ X$ en $X \circ X^{-1}$.

Neem aan dat U en V eindig zijn, $R \subseteq U \times V$ als boven.

b. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R *injectief* is? (in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van R en zijn inverse?

c. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R *transitief* is? (in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van R met zichzelf?

3) We bekijken de bekende *reguliere expressies* over een alfabet Σ. Deze hebben de constante a voor $a \in \Sigma$, binaire operatoren $\cup$ en $\cdot$, en een unaire operator $*$, gegeven van lage naar hoge prioriteit. De binaire operatoren worden tussen de argumenten geschreven 'infix', de unaire operator achter zijn argument 'postfix'.

a. Teken de boom die de expressie $a \cup a \cdot (b \cdot a)*$ representeert.

De operatie mir op reguliere expressies wordt recursief gedefinieerd door $\mathrm{mir}(a) = a$ voor $a \in \Sigma$, en $\mathrm{mir}(K \cup L) = \mathrm{mir}(K) \cup \mathrm{mir}(L)$, $\mathrm{mir}(K \cdot L) = \mathrm{mir}(L) \cdot \mathrm{mir}(K)$, $\mathrm{mir}(K*) = (\mathrm{mir}(K))*$ voor reguliere expressies K en L.

b. Pas deze operatie toe op $a \cup a \cdot (b \cdot a)*$ en teken de boom voor de gevonden expressie.

c. Hoe kan in het algemeen de boom voor $\mathrm{mir}(K)$ bepaald worden uit die voor K ?

4) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar* ?

b. Bewijs: als A_i aftelbaar is voor elke $i \in \mathbb{N}$, dan is ook $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ aftelbaar.

c. $\mathbb{N}^*$ is de verzameling van (eindige) rijtjes natuurlijke getallen,
zoals $(10, 0, 512, 0, 10, 1)$, $(0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$, of $(\,)$.
Beredeneer dat $\mathbb{N}^*$ aftelbaar is.

5) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf samenhangend [connected] ?
Wanneer is een samenhangende graaf een boom?

b. Noem het aantal knopen in een graaf n en het aantal takken e. Welke uiterste waarden kan n aannemen, uitgedrukt in e?

c. Stel een samenhangende graaf G bevat tak e die op een een cykel ligt.
Beredeneer dat de graaf $G - e$ nog steeds samenhangend is.

d. In een graaf G definiëren we een relatie die tussen knoop x en y geldt wanneer er een pad van x naar y loopt. Is deze relatie een equivalentie-relatie?
(Alleen 'ja' of 'nee' als antwoord levert geen punten op.)

6) Gegeven is de taal

$$K = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ eindigt met een 0 of heeft een even aantal 1'en}\ \}$$

Dus bijvoorbeeld $1011 \notin K$, $0010 \in K$, en $01010 \in K$. Maar óók $\lambda \in K$.

a. Geef een eindige automaat voor K; determinisme is niet voorgeschreven.

b. Doe dit ook voor het complement van K ten opzichte van $\{0,1\}^*$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, met andere woorden druk K uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).