Dit tentamen bestaat uit zes opgaven, met totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Beredeneer dat voor verzamelingen A en B geldt $(\, A \cup B\,) \cap (\, A \cup B^c\,) = A$, gebruikmakend van de regels van de verzamelingenalgebra.
Benoem de regels die u gebruikt.

b. Geef de duale bewering van $(\, A \cup B\,) \cap (\, A \cup B^c\,) = A$.
Waarom geldt de duale bewering ook?

c. Beschouw het universum $\mathcal{U}$ dat bestaat uit alle relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$.
De verzameling $\mathcal{T}$ bestaat uit alle transitieve relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$, de verzameling $\mathcal{S}$ uit alle symmetrische relaties op $\{1, 2, 3, 4\}$. Teken een Venn diagram met $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ en geef (zo mogelijk) elk gebied een element dat tot dat gebied behoort.

d. Hoeveel elementen bevat dat universum $\mathcal{U}$?

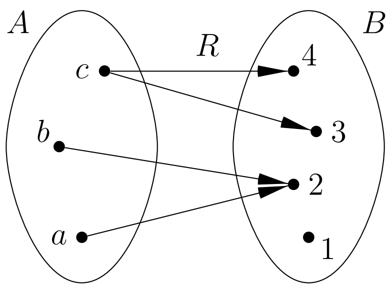
2) Om misverstanden te voorkomen, als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we de *samenstelling* van R en S als

$$R \circ S = \{\ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V\ \}, \text{ en}$$

de *inverse relatie* van R als

$$R^{-1} = \{\ (y, x) \in V \times U \mid xRy\ \}.$$

Laat $A = \{\ a, b, c\ \}$ en $B = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}$. De relatie $R \subseteq A \times B$ is gegeven door een pijldiagram.



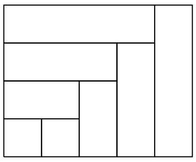
a. Geef R als deelverzameling van $A \times B$. Geef R ook als matrix.

b. Bepaal $R \circ R^{-1}$ en $R^{-1} \circ R$.

c. Beredeneer dat in het algemeen, voor relaties als R en S boven, dat $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
Gebruik de definities, en bepaal of een element (z, x) links ook rechts voorkomt, en andersom.

3) $$2\sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1)$$

a. Schrijf bovenstaande gelijkheid uit voor $n = 4$.
Leg uit dat de gelijkheid (voor $n = 4$) aangetoond kan worden door van onderstaand plaatje de oppervlakte te bekijken.



b. Bewijs de gelijkheid (voor alle n) met inductie, zonder plaatje.

4) Deze opgave gaat over ongerichte grafen.

a. Wanneer is een graaf samenhangend [connected] ?
Wanneer is een samenhangende graaf een boom?

b. Welke relatie bestaat er tussen het aantal knopen n en het aantal takken e in een samenhangende graaf?

c. Stel een samenhangende graaf G bevat tak e die op een een cykel ligt.
Beredeneer dat de graaf $G - e$ nog steeds samenhangend is.

d. In een graaf G definiëren we een relatie die tussen knoop x en y geldt wanneer er een pad van x naar y loopt. Is deze relatie een equivalentie-relatie?
(Alleen 'ja' of 'nee' als antwoord levert geen punten op.)

5) Een restklasse $x (\text{mod } 12)$ in $\mathbb{Z}_{12}$ geven we aan met $\bar{x}$.

a. Bepaal $\bar{x}^2$ voor elke $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}$.

b. Voor welke $\bar{x}$ bestaat er een $\bar{y}$ zodat $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$?

c. Bepaal de rest van $17^{331} + 4^{122}$ bij deling door 12.

6) Gegeven is de taal

$$K = \{\ w \in \{0,1\}^* \mid \text{als } w \text{ subwoord 010 bevat, dan begint } w \text{ niet met een 1}\}$$

a. Druk K met behulp van Boolese operaties ($\cup$, $\cap$ en ^{C}) uit in de talen
$S = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ heeft subwoord } 010\}$ en
$T = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ begint met een } 1\}$.

Hint. Bekijk eventueel van de woorden 01, 10, 010, *en* 1010, *of ze wel/niet in* K, S, T *zitten.*

b. Lat zien dat K regulier is, dus druk K uit in eindige talen met behulp van de reguliere operaties $\cup$, $\cdot$, *.

c. Geef een eindige automaat voor K; deze hoeft niet deterministisch te zijn.