Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal negentien onderdelen die elk een half punt waard zijn. Met een halve startpunt goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Vereenvoudig $(A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)$, gebruikmakend van rekenregels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.

b. Formuleer het *counting principle* voor het tellen van het aantal elementen in de vereniging $A \cup B \cup C$.

c. Bereken het aantal getallen uit $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ dat níet deelbaar is door 3, niet door 5, en niet door 7. (Geef één getal, niet drie.)

2) Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we de *samenstelling* [*composition*] van R en S als

$$R \circ S = \{ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}$$

a. Gegeven is nu de concrete relatie X op $A = \{1, 2, \ldots, 5\}$ als

$$X = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (5, 3) \}$$

Bepaal $X^2 = X \circ X$ en $X \circ X^{-1}$.

b. Bepaal de transitieve afsluiting van X.

c. R is een binaire relatie op een *eindige* verzameling U. Beredeneer dat er een waarde n is zodat de transitieve afsluiting van R gelijk is aan $\bigcup_{k=1}^{n} R^k$.

3) We bekijken de bekende *reguliere expressies* over een alfabet Σ. Deze hebben de constante a voor $a \in \Sigma$, binaire operatoren $\cup$ en $\cdot$, en een unaire operator $*$, gegeven van lage naar hoge prioriteit. De binaire operatoren worden tussen de argumenten geschreven 'infix', de unaire operator achter zijn argument 'postfix'.

a. Teken de boom die de expressie $a \cup a \cdot (b \cdot a)*$ representeert.

De operatie mir op reguliere expressies wordt recursief gedefinieerd door $\mathrm{mir}(a) = a$ voor $a \in \Sigma$, en $\mathrm{mir}(K \cup L) = \mathrm{mir}(K) \cup \mathrm{mir}(L)$, $\mathrm{mir}(K \cdot L) = \mathrm{mir}(L) \cdot \mathrm{mir}(K)$, $\mathrm{mir}(K*) = (\mathrm{mir}(K))*$ voor reguliere expressies K en L.

b. Pas deze operatie toe op $a \cup a \cdot (b \cdot a)*$ en teken de boom voor de gevonden expressie.

c. Hoe kan in het algemeen de boom voor $\mathrm{mir}(K)$ bepaald worden uit die voor K ?

4) We bekijken twee talen.
De taal L wordt gespecificeerd door de volgende regels:

1. $a \in L$.
2. als $x \in L$ dan $xb \in L$.
3. als $x \in L$ en $y \in L$ dan $xya \in L$.

De taal K_{on} bestaat uit alle woorden over $\{ a, b \}$ die een oneven aantal a's bevatten.

a. Bewijs met inductie dat $L \subseteq K_{on}$.

b. Leg uit dat L en K_{on} niet gelijk aan elkaar zijn.

c. Geef een recursieve definitie van K_{on}, met enige uitleg om aan te geven waarom deze definitie wèl K_{on} vastlegt.

5) **a.** Op welke dag valt 20 december 2096? (Vandaag is het woensdag.)

b. Het getal x heeft de representatie $(\, a_n \dots a_1 a_0 \,)_8$ in het achttallig stelsel, dus $x = \sum_{i=0}^{n} a_i 8^i$, met $a_i \in \{0, 1, \dots 7\}$.
Hoe zien we aan $a_n \dots a_1 a_0$ dat x deelbaar is door 4? En door 7?

6) **a.** Wanneer heet een relatie een equivalentierelatie?
(Geef de drie noodzakelijke eigenschappen en niet alleen de namen daarvan)

Beschouw de verzameling $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.
Gegeven is de relatie $Q = \{ \, (a, b), (a, e), (c, d) \, \}$ op A.

b. Van de equivalentierelatie R op A is bekend dat $Q \subseteq R$ en dat $(c, a) \notin R$.
Beredeneer dat $(e, b) \in R$ en dat $(b, c) \notin R$.

c. Geef de equivalentieklassen van alle mogelijke equivalentierelaties S op A met de eigenschappen dat $Q \subseteq S$ en dat $(b, c) \notin S$.

7) Gegeven zijn de talen

$$K = \{ \, w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ heeft subwoord } 00 \, \} \qquad \text{en}$$

$$L = \{ \, w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ heeft een even aantal 1-en} \, \}$$

a. Teken een Venn diagram van $\{0, 1\}^*$ met daarin K en L. Schrijf in elk van de vier gebieden een woord van minimale lengte (maar ongelijk aan λ) uit dat gebied.
Waar bevindt zich λ?

b. Geef eindige automaat voor de taal $K \cup L$.