Fundamentele Informatica 1 **21 december 2005, 14–17 u.**

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal twintig onderdelen die elk een half punt waard zijn. Samen goed voor een tien. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) De verzamelingen A, B en C komen uit het universum U.

a. Beredeneer dat $A \cup B = A$ desdals $B \subseteq A$ (twee kanten op)

b. Controleer met Venn diagrammen of de distributieve eigenschap tussen vereniging en verschil $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ geldt.

c. Bewijs de *absorptiewet* $A \cap (A \cup B) = A$ met behulp van de regels van de verzamelingenalgebra door de uitdrukking $(A \cup \varnothing) \cap (A \cup B)$ op twee manieren uit te werken. Benoem de gebruikte regels.

2) Zoals gewoonlijk voor binaire relaties definiëren we de *samenstelling* van $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ als $R \circ S = \{ (x,z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}$.

a. Gegeven is nu de concrete relatie $X \subseteq \{0,1,2\} \times \{a,b,c,d\}$ als

$$X = \{ (0,a), (1,a), (1,b), (1,d), (2,d) \}$$

Teken X als gerichte graaf (tussen twee verzamelingen). Geef X als matrix.

b. Bepaal $X^{-1} \circ X$. Bepaal X^2.

Neem aan dat U en V eindig zijn, $R \subseteq U \times V$ als boven.

c. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R functioneel is? (in graaf-terminologie) Wat weten we dan van de samenstelling van de inverse van R met R zelf?

d. Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R surjectief (op) is? (in graaf-terminologie) Wat weten we dan van de samenstelling van de inverse van R met R zelf?

3) $\oplus$ en $\ominus$ zijn hier binaire bewerkingen (op gehele getallen).

a. De expressie $\oplus \ominus \oplus\ 3\ 4\ 1 \ominus 2 \oplus 3\ 0$ is in preorde notatie (Poolse notatie). Teken de bijbehorende boom.

b. Nummer de knopen van uw boom volgens postordening.
Wandel langs de knopen van de boom (in postorde) en bereken de waarde bij elke knoop. Hierbij zijn $\oplus$ en $\ominus$ respectievelijk de bewerking maximum en minimum.

c. Beschrijf een functie die de hoogte van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* $f(\text{blad})$ en *recursie* $f(\text{knoop})$ uitgedrukt in $f(\text{links})$ en $f(\text{rechts})$.
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen.)

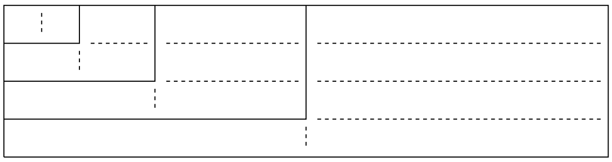
4) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar* ?

b. Neem $\Sigma = \{ a, b \}$. Beredeneer dat Σ^* aftelbaar is.

c. Bewijs dat voor elke verzameling V geldt:
er is geen surjectieve afbeelding van V op $\mathcal{P}(V)$.

5) $$\sum_{i=0}^{n} (i+2) \cdot 2^i = (n+1) \cdot 2^{n+1}$$

a. Schrijf bovenstaande gelijkheid uit voor $n = 3$.
Leg uit wat dit met onderstaand plaatje van doen heeft.

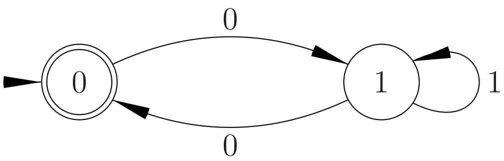


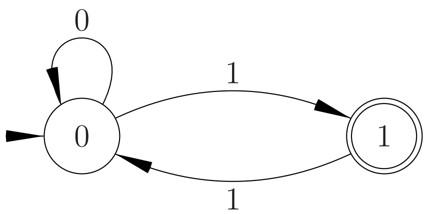
b. Bewijs de gelijkheid met inductie.

6) **a.** Begin de reeks 'Psibonacci' getallen met $\psi_0 = 2$ en $\psi_1 = 1$, en de bij Fibonacci gebruikelijke recurrentie. Wat is het *laatste cijfer* van het duizendste Psibonacci-getal ψ_{1000}?

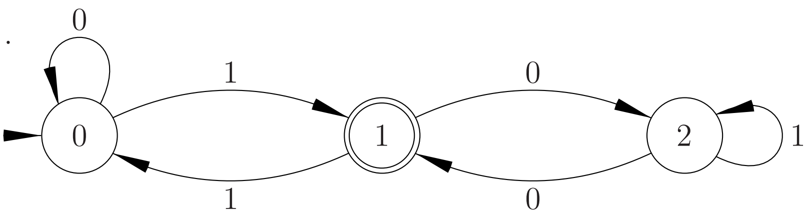
b. Jeroen schrijft: "Trouwens.. het lijkt erop dat elk 5e Fibonacci-getal deelbaar is door 5, maar dat terzijde". Heeft hij gelijk, bij de bekende beginwaarden $\phi_0 = 0$ en $\phi_1 = 1$?

7) a,b. .





c. .



Ga van bovenstaande automaten na
– welke taal gerepresenteerd wordt (geef een reguliere expressie voor die taal),
– of de automaat deterministisch is,
– zo nee, of deze deterministisch te maken is door toestanden ('staten') en takken toe te voegen, zodanig dat dezelfde taal geaccepteerd wordt.