Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met totaal 20 onderdelen die elk 0.5 punt waard zijn. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) **a.** Schrijf het verschil $A \backslash B$ met behulp van doorsnede en complement.

b. Laat met behulp van Venn diagrammen zien dat $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Geef duidelijk aan wat al uw arceringen voorstellen.

c. Laat met behulp van de verzamelingenalgebra zien dat $(A \cup B) \backslash A = B \backslash A$. Herschrijf eerste de operator $\backslash$ als hierboven. Benoem de gebruikte regels.

2) De relatie R op $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ bestaat uit de paren $(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3)$.

a. Teken R als gerichte graaf, en geef de matrix-representatie van R.

b. Bepaal R^2, R^3, en $R \circ R^{-1}$ [in de 'relatievolgorde' eerst R dan R^{-1}].

c. Geldt voor de reeks relaties R^n, $n \in \mathbb{N}$, dat deze vanaf zeker moment constant is; dat wil zeggen, er bestaat een N zodat alle R^n, $n \geq N$, gelijk aan elkaar.

3) **a.** Geef een recursieve definitie van pre-ordening voor binaire bomen.

b. Van een binaire boom T zijn de knopen in pre-ordening op alfabetische volgorde gegeven: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ (inderdaad J ontbreekt).
De symmetrische ordening van de knopen van T is $C, B, D, A, E, G, H, F, I, K$.
Reconstrueer de boom T (en teken er een plaatje van).

c. Als de pre-ordening van een boom net als boven gelijk is aan $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, kan de symmetrische ordening dan elke willekeurige permutatie van deze letters zijn?

4) In een hypothetische programmeertaal is het volgende programma gegeven:

```
function Fun(n)
    if (n = 0) then print 'a';
    else if (n = 1) then print 'b';
        else Fun(n-1); Fun(n-2);
        endif
    endif
endfunction
```

a. Teken de boom van functieaanroepen voor Fun(4).
Interne knopen bevatten een getal (de waarde van het argument van de functieaanroep) en de bladeren bevatten a of b (de geprinte letter). Takken geven aan dat een functie wordt aangeroepen of een symbool geprint.

b. Bewijs, met inductie naar $n \in \mathbb{N}$, dat Fun(n) ten hoogste 2^n symbolen print.

5) Een restklasse $x(\text{mod } 12)$ in $\mathbb{Z}_{12}$ geven we aan met $\bar{x}$.

a. Bepaal $\bar{x}^2$ voor elke $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{12}$.

b. Voor welke $\bar{x}$ bestaat er een $\bar{y}$ zodat $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$?

c. Bepaal de rest van $17^{331} + 4^{122}$ bij deling door 12.

6) Ga voor de volgende relaties op $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ na of ze reflexief, irreflexief, symmetrisch, antisymmetrisch of transitief zijn.
Geef niet alleen het antwoord, maar ook de toelichting.

a. xRy als $x \mid y$.

b. xRy als $x = 2y$.

c. xRy als $x^2 \geq y$.

7) Gegeven is de taal

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ begint met een } a \text{ of heeft precies twee } b\text{'s}\ \}$$

Dus $babb \notin K$, $abaa \in K$, en ook $babaa \in K$.

a. Geef een eindige automaat voor K; determinisme is niet voorgeschreven.

b. Doe dit ook voor het complement van K ten opzichte van $\{a, b\}^*$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, met andere woorden druk K uit in eindige talen met behulp van de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).