Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven. In totaal zijn er 19 onderdelen die elk 0.5 punt waard zijn, behalve 7a (0.8pt) en 7c (0.7pt). Dat zijn samen 10 punten.
Geef steeds voldoende uitleg. Succes! Oeps: opgave 2a is weggevallen: 0.5 punt kado.

1) **a.** Beredeneer dat voor verzamelingen A en B geldt $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$, gebruikmakend van de regels van de verzamelingenalgebra.
Benoem de regels die u gebruikt.

b. Geef de duale bewering van $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

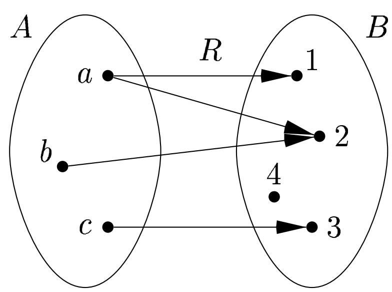
c. Bekijk de talen $K = ((aa)^* \cdot b)^*$ en $L = b \cdot a^* \cdot b$.
Teken een Venn diagram voor K en L en geef voor elk gebied een zo kort mogelijk, niet-leeg woord dat tot dat gebied behoort.

2) Voor de zekerheid geven we een tweetal bekende definities voor relaties.
Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we
– de *samenstelling* van R en S als

$$R \circ S = \{ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}.$$

– Voor $X \subseteq U$ is $R(X) = \{ y \in V \mid xRy \text{ voor een } x \in X \}$.

Laat $A = \{ a, b, c \}$ en $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. De relatie $R \subseteq A \times B$ is gegeven door een plaatje.



b. Voor $X = \{ b, c \}$ bepaal $R(X)$ en $R^{-1}(R(X))$. Bepaal $R \circ R^{-1}$.

c. Voor willekeurige $R \subseteq U \times V$, is de samenstelling $R \circ R^{-1}$ niet altijd reflexief.
Geef een eenvoudige voorwaarde op R waaronder dat wél het geval is.

3) **a.** Geef een recursieve definitie van pre-ordening voor binaire bomen.

b. Van een binaire boom B zijn de knopen in pre-ordening op alfabetische volgorde gegeven: $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$ (inderdaad J ontbreekt).
De symmetrische ordening van de knopen van B is $C, B, D, F, E, G, A, H, K, I$.
Reconstrueer de boom B (en teken er een plaatje van).

c. Als de pre-ordening van een boom net als boven gelijk is aan $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, kan de symmetrische ordening dan elke willekeurige permutatie van deze letters zijn?

4) Zoals bekend worden de Fibonacci getallen gegeven door $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, en voor $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

a. Bereken $\sum_{k=0}^{4} F_k^2$. Wat betekent $\sum_{k=1}^{0} F_k^2$?

b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ voor $n \geq 0$.

5) **a.** Op welke dag valt 22 december 2098?
(Vandaag is woensdag; gebruik 'modulo' in uw antwoord.)

b. Voor alle gehelen x, y, z geldt: als $x \equiv y \mod m$, dan $x^z \equiv y^z \mod m$.
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.

c. Voor alle gehelen x, y, z geldt: als $x \equiv y \mod m$, dan $z^x \equiv z^y \mod m$.
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.

6) **a.** Wanneer heet een relatie $R \subseteq A \times A$ een equivalentierelatie?
Benoem de drie eigenschappen, en geef hun definitie.

b. De equivalentieklasse van $x \in A$ onder de equivalentierelatie R noteren we als $[x]$.
Bewijs dat xRy desdals $[x] \cap [y] \neq \varnothing$.

7) Gegeven is de taal

$$K = \{ \; w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft een } a \text{ als twee-na-laatste letter } \}$$

Dus $babb \in K$, $abaa \notin K$, en ook $a \notin K$.

a. Geef een deterministische eindige automaat voor K.

b. Doe dit ook voor de taal $\text{mir}(K)$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).
Doe dit ook voor het complement van K ten opzichte van $\{a, b\}^*$.