

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, die elk 1.5 punt waard zijn, behalve opgave 4 die voor 1.0 punt meetelt. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

- 1) Met  $\mathcal{P}(V)$  geven we de machtsverzameling van de verzameling  $V$  aan.
- Beredeneer: als  $V$   $n$  elementen heeft, dan heeft  $\mathcal{P}(V)$   $2^n$  elementen.
  - Geldt  $\emptyset \in \mathcal{P}(V)$ ? Geldt  $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(V)$ ? Geldt  $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(V)$ ? Geldt  $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(V)$ ?  
Geef steeds aan of de bewering geldt voor elke  $V$ , voor geen enkele  $V$ , of dat dit van  $V$  afhangt.
  - Als  $\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(V)$  voor verzamelingen  $U$  en  $V$ , geldt dan  $U = V$ ?  
Zo ja, bewijs dit. Zo nee, geef dan een voorbeeld waaruit dit blijkt.
- 2) We breiden een aantal definities gegeven voor functies (in het OU-boek) uit tot relaties. Als  $R \subseteq U \times V$  en  $S \subseteq V \times W$  (binaire) relaties zijn, dan definiëren we
- de *inverse* van  $R$  als  $R^{-1} = \{ (y, x) \mid xRy \}$
  - de *samenstelling* van  $R$  en  $S$  als
 
$$R; S = \{ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}.$$
 nb. soms wordt ook de notatie  $R \circ S$  gebruikt.
  - $R$  is *injectief* als uit  $xRy$  en  $zRy$  volgt dat  $x = z$ .
- Gegeven is nu de concrete relatie  $X$  op  $A = \{0, 1, \dots, 5\}$  als
 
$$X = \{ (0, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 5) \}$$
 Bepaal  $X^2 = X; X$  en  $X; X^{-1}$ .  
Neem aan dat  $U$  en  $V$  eindig zijn,  $R \subseteq U \times V$  als boven.
  - Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die  $R$  representeert, dat  $R$  *injectief* is? (in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van  $R$  en zijn inverse?
  - Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die  $R$  representeert, dat  $R$  *transitief* is? (in graaf-terminologie). Wat weten we dan van de samenstelling van  $R$  met zichzelf?
- 3)
  - Wanneer heet een verzameling *aftelbaar*?
  - Neem  $\Sigma = \{ a, b \}$ . Beredeneer dat  $\Sigma^*$  aftelbaar is.
  - Bewijs dat voor elke verzameling  $V$  geldt: er is geen surjectieve afbeelding van  $V$  op  $\mathcal{P}(V)$ .
- 4) De verzameling Blurps is de kleinste verzameling strings over  $\{ \Delta, \diamond \}$  zodat:
- $\Delta$  is een Blurps.
  - Als  $x$  een Blurps is, dan zijn ook  $x\Delta\Delta$  en  $\diamond xx\diamond$  Blurps-en.
  - Als  $x$  en  $y$  Blurps-en zijn, dan is ook  $x\Delta y$  een Blurps.
- Laat zien dat alle elementen van Blurps een oneven aantal driehoekjes  $\Delta$  hebben of tenminste één ruit  $\diamond$  bevatten.

- 5) a. Een relatie heet een equivalentierelatie als zij reflexief, symmetrisch en transitief is. Wat betekenen die drie begrippen?  
 $\mathbb{N}^+$  is de verzameling positieve gehele getallen.  
Definieer de relatie  $\sim$  op  $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$  door  $(a, b) \sim (c, d)$  als  $ad = bc$ .
- b. Laat zien dat  $\sim$  een equivalentierelatie is.
- c. Deze equivalentierelatie is welbekend. Hoe?
- 6) a. Op welke dag valt 18 maart 2016?  
(Vandaag is donderdag; gebruik het woord 'modulo' in uw antwoord.)
- b. Voor alle gehele  $x, y, z$  geldt: als  $x \equiv y \pmod{m}$ , dan  $x^z \equiv y^z \pmod{m}$ .  
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.
- c. Voor alle gehele  $x, y, z$  geldt: als  $x \equiv y \pmod{m}$ , dan  $z^x \equiv z^y \pmod{m}$ .  
Als dit waar is, beredeneer dan waarom, geef anders een tegenvoorbeeld.
- 7) We bestuderen de taal  $K \subseteq \{a, b\}^*$  bestaande uit alle woorden  $w$  met de eigenschap  
–  $w$  bevat (tenminste) twee  $b$ 's én eindigt op een  $b$ ,  
oftewel (in andere woorden)  
– de laatste letter van  $w$  is  $b$  en  $w$  bevat nog tenminste een andere  $b$ .
- a. Geef een deterministische eindige automaat voor  $K$ .
- b. Toon aan dat  $K$  *regulier* is, maw. druk  $K$  uit in eindige talen mbv. de bewerkingen vereniging, concatenatie en ster ( $\cup, \cdot, *$ ).