Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, die elk 1.5 punt waard zijn, behalve opgave 4 die voor 1.0 punt meetelt. Geef steeds voldoende en voldoende uitleg. Succes!

1) We bekijken hier verzamelingen in een universum U.

a. Schrijf het verschil $A - B$ met behulp van vereniging $\cup$ en complement ^{c}.
Gebruik een Venndiagram om de uitdrukking $A - (A - B)$ te vereenvoudigen.

b. Herschrijf $A - (A - B)$ tot de gevonden eenvoudige uitdrukking met behulp van de regels uit de verzamelingenalgebra.
Benoem de gebruikte regels (en vergeet de voor de hand liggende regels niet).

c. Stel u weet van de bewerkingen $\cup$, $\cap$ en ^{c} alleen *distributiviteit*, de *complementregels* ($A \cup A^c = U$ en $A \cap A^c = \varnothing$), en de regels voor *nul en één* ($A \cup \varnothing = A$ en $A \cap U = A$).
Laat zien dat *idempotentie* $A \cap A = A$ daaruit volgt, door $A \cap (A \cup A^c)$ op twee manieren te vereenvoudigen.

2) We breiden een aantal definities gegeven voor functies (in het OU-boek) uit tot relaties.
Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we
– de *inverse* van R als $R^{-1} = \{ (y, x) \mid xRy \}$
– de *samenstelling* van R en S als

$$R\,;S = \{ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}.$$

nb. soms wordt ook de notatie $R \circ S$ gebruikt.
– R is *functioneel* als uit xRy en xRz volgt dat $y = z$.

a. Gegeven is nu de concrete relatie $X \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{a, b, c\}$ als

$$X = \{ (1, a), (1, c), (2, a), (2, b) \}$$

Teken X als gerichte graaf (tussen twee verzamelingen). Bepaal $X^{-1}\,; X$.

b. Neem aan dat U en V eindig zijn, $R \subseteq U \times V$ als boven.
Hoe herkennen we aan de gerichte graaf die R representeert, dat R functioneel is? (in graaf-terminologie)

c. Laat zien dat in het algemeen: als $R^{-1}\,; R \subseteq 1_V$ dan is R functioneel.

3) $\oplus$ en $\ominus$ zijn hier binaire bewerkingen (op gehele getallen).

a. De expressie $\ominus \oplus 1\ 5 \ominus 8 \oplus 1\ 3$ is in preorde notatie (Poolse notatie). Teken de bijbehorende boom.

b. Nummer de knopen van uw boom volgens postordening.
Wandel langs de knopen van de boom (in postorde) en bereken de waarde bij elke knoop. Hierbij zijn $\oplus$ en $\ominus$ respectievelijk de bewerking maximum en minimum.

c. Beschrijf een functie die de hoogte van een binaire boom bepaalt, door het geven van *basis* $f(\text{blad})$ en *recursie* $f(\text{knoop})$ uitgedrukt in $f(\text{links})$ en $f(\text{rechts})$.
Je mag aannemen dat de boom volledig is (elke knoop is ofwel een blad, ofwel heeft beide kinderen.)

4) De reeks c_n wordt gedefinieerd door $c_{n+1} = c_n + 6c_{n-1} - 6$ voor $n \geq 1$ en $c_0 = 3$, $c_1 = 2$.

a. Bewijs met volledige inductie dat $c_n = 3^n + (-2)^n + 1$.

b. Bepaal formules (uitgedrukt in n) voor achtereenvolgens $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k$, $\sum_{k=0}^{n} 1$ en $\sum_{k=0}^{n} c_k$.

5) **a.** Wanneer heet een relatie een equivalentierelatie?

Beschouw de verzameling $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Gegeven is de relatie $Q = \{\ (0, 1), (2, 4), (5, 2)\ \}$ op A.

b. Van een equivalentierelatie R op A is bekend dat $Q \subseteq R$ en dat $(3, 1) \notin R$.
Beredeneer dat $(4, 5) \in R$ en dat $(0, 3) \notin R$.

c. Geef de equivalentieklassen van alle mogelijke equivalentierealties R op A met de eigenschappen dat $Q \subseteq R$ en dat $(3, 1) \notin R$.

6) **a.** Wat betekent $a \equiv b \pmod m$?
Laat zien dat als $a_1 \equiv a_2 \pmod m$ en $b_1 \equiv b_2 \pmod m$,
dan ook $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod m$.

We kiezen $m = 6$. Een restklasse $x (\mathrm{mod}\ 6)$ in $\mathbb{Z}_6$ geven we aan met $\bar{x}$.

b. Bepaal $\bar{x}^3$ voor elke $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6$.

c. Beredeneer dat $n^3 - n$ deelbaar is door 6 voor elk geheel getal n.

7) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft een even aantal } b\text{'s of eindigt op een } a\ \}$$

b. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de bewerkingen vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).
Aanwijzing: bepaal eerst uitdrukkingen voor $\{\ w \in \{a, b\}^* \mid w$ heeft *precies twee* b's $\}$, en $\{\ w \in \{a, b\}^* \mid w$ heeft een even aantal b's $\}$.