Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven, met in totaal 20 onderdelen die elk evenveel waard zijn. Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) Laat V een verzameling zijn met n elementen en $\mathcal{P}(V)$ de machtsverzameling van V.

a. Laat zien dat het aantal elementen in $\mathcal{P}(V)$ gelijk is aan 2^n.

b. Geldt $\varnothing \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \in \mathcal{P}(V)$? Geldt $\{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(V)$?
Geef steeds aan of de bewering geldt voor élke V, voor geen enkele V, of dat dit van V afhangt.

c. Zij $U \subseteq V$. Geldt er nu dat $\mathcal{P}(U) \subseteq \mathcal{P}(V)$?
Zo ja, bewijs dit. Zo nee, geef dan een voorbeeld waaruit dit blijkt.

2) We breiden een aantal definities gegeven voor functies (in het OU-boek) uit tot relaties.
Als $R \subseteq U \times V$ en $S \subseteq V \times W$ (binaire) relaties zijn, dan definiëren we
– de *inverse* van R als $R^{-1} = \{ (y, x) \mid xRy \}$
– de *samenstelling* van R en S als

$$R \circ S = \{ (x, z) \in U \times W \mid xRy \text{ en } ySz \text{ voor een } y \in V \}.$$

– R is *injectief* als uit xRz en yRz volgt dat $x = y$.

a. Gegeven is nu de concrete relatie X op $A = \{0, 1, \ldots, 5\}$ als

$$X = \{ (0,4), (1,2), (2,1), (3,4), (4,2), (4,5) \}$$

Bepaal $X^2 = X \circ X$ en $X \circ X^{-1}$.

b. Laat zien dat in het algemeen: als $R \circ R^{-1} \subseteq 1_U$ dan is R injectief.

c. Geldt het omgekeerde ook: als R injectief is, dan $R \circ R^{-1} \subseteq 1_U$?

3) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar* ?

Voor de volgende twee onderdelen: eventueel benodigde resultaten moeten geformuleerd worden, maar hoeven niet bewezen te worden.

b. Bewijs: als A_i aftelbaar is voor elke $i \in \mathbb{N}$, dan is ook $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ aftelbaar.

c. $\mathbb{N}^*$ is de verzameling van (eindige) rijtjes natuurlijke getallen,
zoals $(10, 0, 512, 0, 10, 1)$, $(0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21)$, of $(\,)$.
Is $\mathbb{N}^*$ aftelbaar?

4) De rij van Fibonacci wordt gegeven door $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$ met beginwaarden $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$.

a. Bereken $\sum_{k=1}^{4} F_{2k}$.

b. Bewijs met inductie dat $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ voor alle $n \geq 1$.

c. Per ongeluk begint u met de waarden $F_0 = 1$ en $F_1 = 3$.
Welke formule vindt u dan bij **b.** ?

5) Een restklasse $x (\mathrm{mod}\ 14)$ in $\mathbb{Z}_{14}$ geven we aan met $\bar{x}$.
Een restklasse $\bar{x}$ heet *inverteerbaar* als er een $\bar{y}$ is met $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$,
$\bar{y}$ heet de *inverse* van $\bar{x}$.

a. Leg uit dat $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\ldots \overline{12}$ *niet* inverteerbaar zijn.

b. Bepaal de inverteerbare restklassen modulo 14, en bepaal van elk van deze de inverse.

6) Zij $X = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ \}$.
De relatie $\sqsubseteq$ in X is gedefinieerd door $x \sqsubseteq y$ als $x = y$ of $y \geq 2x$.

a. Bewijs dat $\sqsubseteq$ een partiële ordening is op X.

b. Teken het Hasse-diagram van $(X, \sqsubseteq)$.

c. Bepaal de maximale en minimale elementen van $(X, \sqsubseteq)$.
Heeft $(X, \sqsubseteq)$ een grootste dan wel een kleinste element?

7) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft een } a \text{ als twee-na-laatste letter } \}$$

b. Doe dit ook voor de taal $\mathrm{mir}(K)$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster $(\cup, \cdot, {}^*)$.
Doe dit ook voor het complement van K ten opzichte van $\{a, b\}^*$.