Geef steeds voldoende uitleg. Succes!

1) Laat A, B en C verzamelingen in het universum U zijn.

a. Beredeneer dat $A \cup B = A$ desdals $B \subseteq A$ (twee kanten op)

b. Vereenvoudig $[\ (A \cup B^c) \cap C\ ] \cup [\ (B - A) \cap C\ ]$ zo ver mogelijk, gebruikmakend van rekenregels uit de verzamelingenalgebra. Benoem de gebruikte regels.
Aanwijzing: wat is $(A \cup B^c) \cup (B - A)$?

2) We breiden een aantal definities voor functies (uit het OU-boek) uit tot relaties.
Als $R \subseteq V \times W$ een (binaire) relatie is, dan definiëren we
– het *domein* van R als $\mathrm{dom}(R) = \{\ x \in V \mid xRy$ voor zekere $y \in W\ \}$
– het *bereik* van R als $\mathrm{ber}(R) = \{\ y \in W \mid xRy$ voor zekere $x \in V\ \}$
– de *inverse* van R als $R^{-1} = \{\ (y,x) \mid xRy\ \}$
Gegeven is nu de concrete relatie R op $A = \{1,2,3,4\}$ als

$$R = \{\ (1,3),(1,4),(3,2),(3,3),(3,4)\ \}$$

a. Geef R gerepresenteerd als matrix en als gerichte graaf.

b. Bepaal domein, bereik en inverse van R.

c. Bepaal $R^2 = R \circ R$ en R^3.

3) **a.** Wanneer heet een verzameling *aftelbaar* ?

b. Bewijs: als A en B aftelbare verzamelingen zijn, dan is ook $A \cup B$ aftelbaar.
Eventueel benodigde resultaten moeten geformuleerd worden, maar hoeven niet bewezen te worden.

c. Laat zien dat $\mathbb{Z}$ aftelbaar is.

Dit tentamen bestaat uit zeven opgaven. In totaal kunnen 100 punten behaald worden.
Elke opgave is 15 punten waard, behalve opgave 4 die 10 punten op kan leveren.

Indien u voor het deeltentamen een voldoende resultaat heeft behaald, krijgt u voor de eerste drie opgaven samen in ieder geval het cijfer van uw deeltentamen (vermenigvuldigd met 4,5).

4) **a.** Schrijf als sommatie ($\sum \ldots$) en bereken de uitkomst van $-1 + 1 + 3 + 5 + \ldots + 191$.

b. We definiëren de rij a_n, $n \in \mathbb{N}$, door middel van de recurrentie $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, met beginwaarden $a_0 = 2$ en $a_1 = 1$.
Bewijs met inductie dat $a_n = (-1)^n + 2^n$.

5) Een restklasse $x(\text{mod } 7)$ in $\mathbb{Z}_7$ geven we aan met $\bar{x}$.

a. Bepaal $\bar{x}^3$ en $\bar{x}^6$ voor elke $\bar{x} \in \mathbb{Z}_7$.

b. Bewijs dat $x^6 - 1$ deelbaar is door 7 als x niet deelbaar is door 7.

c. Bepaal de rest van $100^{100} + 77^{77}$ bij deling door 7.

6) Ga voor de volgende relaties op $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ na of ze reflexief, irreflexief, symmetrisch, antisymmetrisch of transitief zijn.
Geef niet alleen het antwoord, maar ook de toelichting.

a. xRy als $x \mid y$.

b. xRy als $x = 2y$.

c. xRy als $x^2 \geq y$.

7) **a.** Geef een deterministische eindige automaat voor de taal

$$K = \{\ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ heeft een suffix } aabb\ \}$$

b. Doe dit ook voor de taal $\text{mir}(K)$.

c. Toon aan dat K *regulier* is, maw. druk K uit in eindige talen mbv. de operaties vereniging, concatenatie en ster ($\cup$, $\cdot$, *).
Doe dit ook voor het complement van K ten opzichte van $\{a, b\}^*$.
(op welke suffixen eindigen woorden in het complement?)