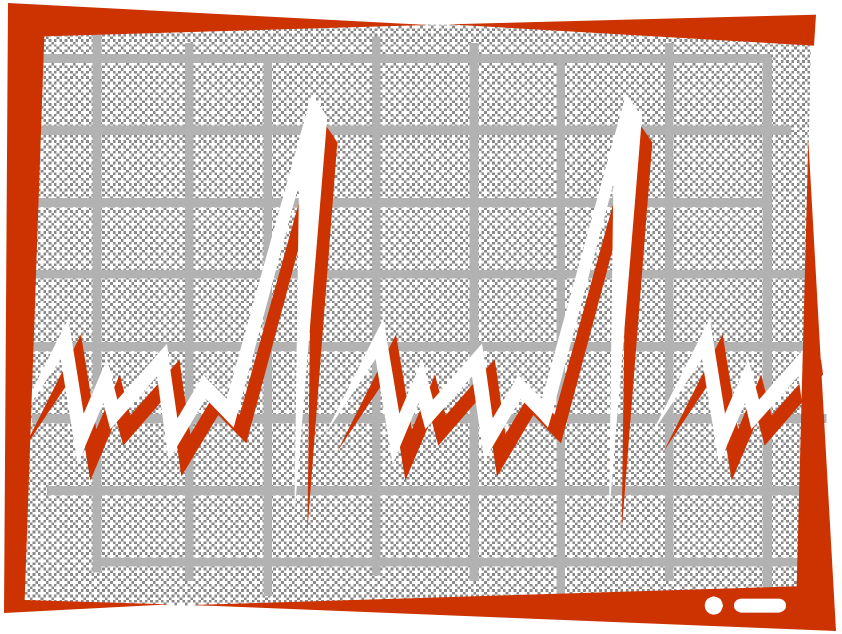
3

Functies



Ch.3 ‘Functions ~~and Algorithms~~’

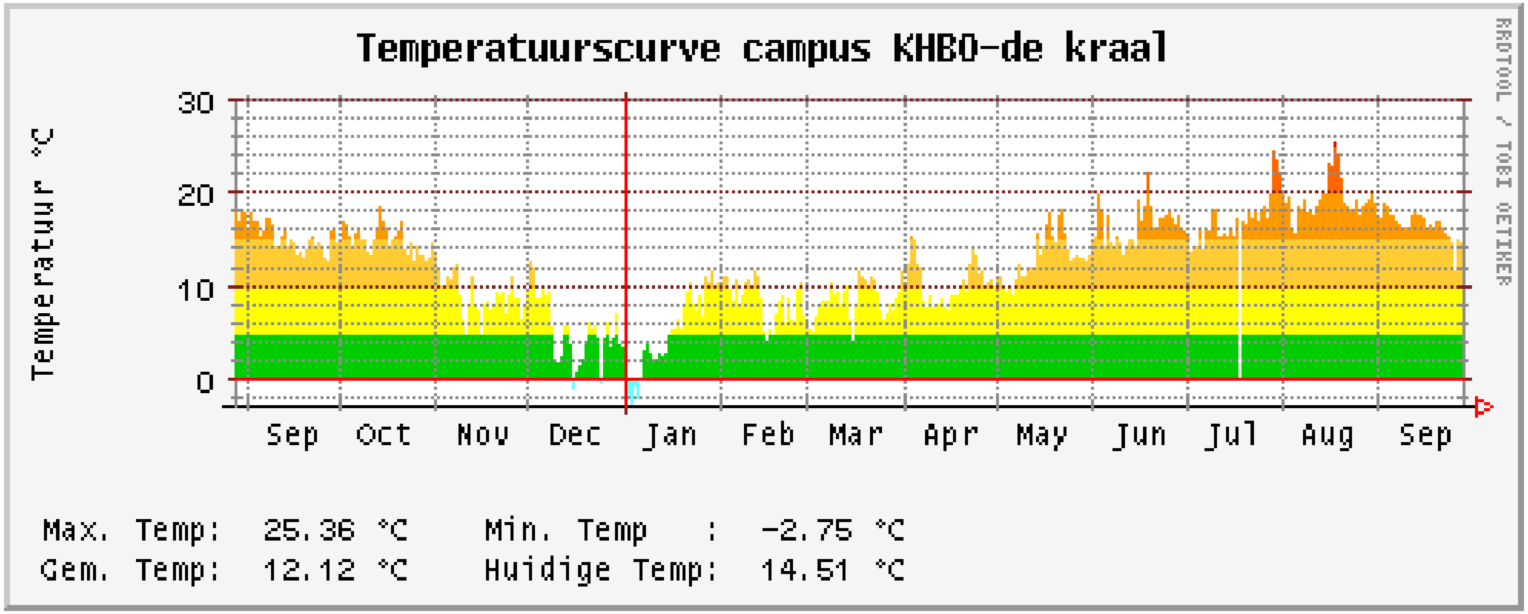
Ch.3 ‘Functions and Algorithms’

Inderdaad, ‘algorithms’ heb ik doorgestreept.

Het is een mooi onderwerp, maar komt hier bij de vakken Algoritmiek, Datastructuren, en Complexiteit aan de orde.

Maar het kan dienen als achtergrond en motivatie.

temperatuur



$d \mapsto T_d \quad d \in \{ 28.8.01, \ldots 30.9.02 \}$

$T_d \in \mathbb{R}$

oneindige reeks

0102010301020104010201030102010501020103…

$n \mapsto \mathrm{tail}(n)$

0	1000
1	1001
10	1010
11	1011
100	1100
101	1101
110	1110
111	1111
	10000

0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,
0,1,0,4,0,1,0,2,0,1,0,3,
0,1,0,2,0,1,0,5, …

$0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 0,\ 3 \mapsto 2,$
$4 \mapsto 0,\ 5 \mapsto 1,\ 6 \mapsto 0,\ 7 \mapsto 3,$
$8 \mapsto 0,\ 9 \mapsto 1,\ 10 \mapsto 0,\ \ldots$

https://oeis.org/A007814

oneindige reeks

Bedoeld wordt dat een oneindige reeks (van “objecten”) ook een functie is: van de natuurlijke getallen naar de verzameling van die objecten.

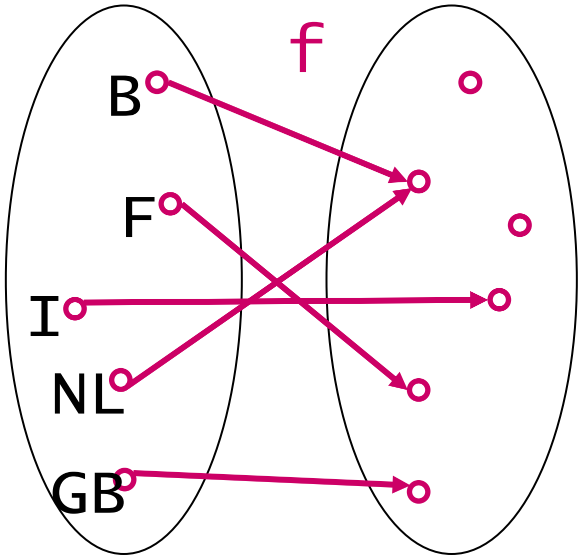
In dit hoofdstuk worden eigenschappen sommen van reeksen ook behandeld.

Informeel is een functie een voorschrift dat aan origineel x een beeld y=f(x) toevoegt. Twee verschillende voorschriften kunnen tot hetzelfde resultaat leiden, en daarom wordt er op een andere manier naar functies gekeken.

Een functie is daarbij formeel een functionele en totale relatie. De relatie bij een ‘voorschrift’ heet soms de grafiek van dat voorschrift:

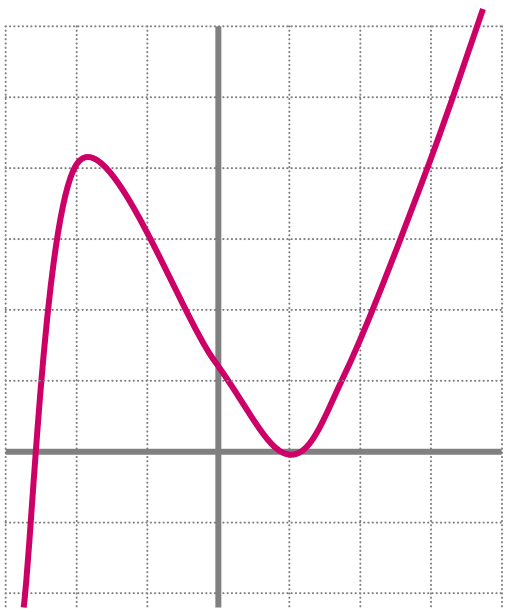
{ (x,f(x)) | x in het domein van f }

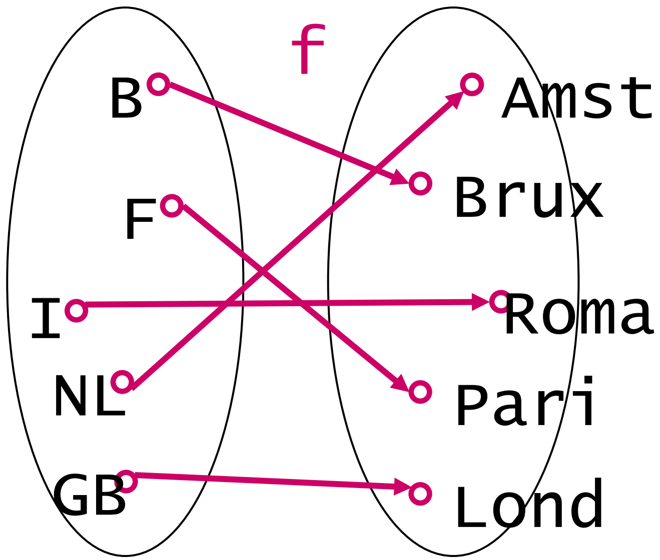
TODO Het plaatje van de volgende slide kan beter door een ander voorbeeld vervangen worden om een algemener beeld te krijgen. (zie hiernaast)



informeel

Een *functie* van A naar B is een voorschrift dat aan ieder element van A één element van B toevoegt.





0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4, …

	Am	Br	Lo	Pa	Ro
B		x			
F				x	
GB			x		
I					x
NL	x				

$$f: A \to B$$
$$f(x) = y$$
$$x \mapsto y$$

grafiek van een functie

functie f: $A \to B$. de *grafiek* van f is verzameling
$\{ (x,f(x)) \mid x \in A \}$ in $A \times B$.

$f(x) = 2(x+1)$ vs. $g(x) = 2x+2$

informeel ‘voorschrift’
⇨ formeel ‘relatie’

relatie →
binaire relatie
→ functie

functies zijn gelijk als hun grafieken gelijk zijn, dwz. hun ‘uitkomsten’

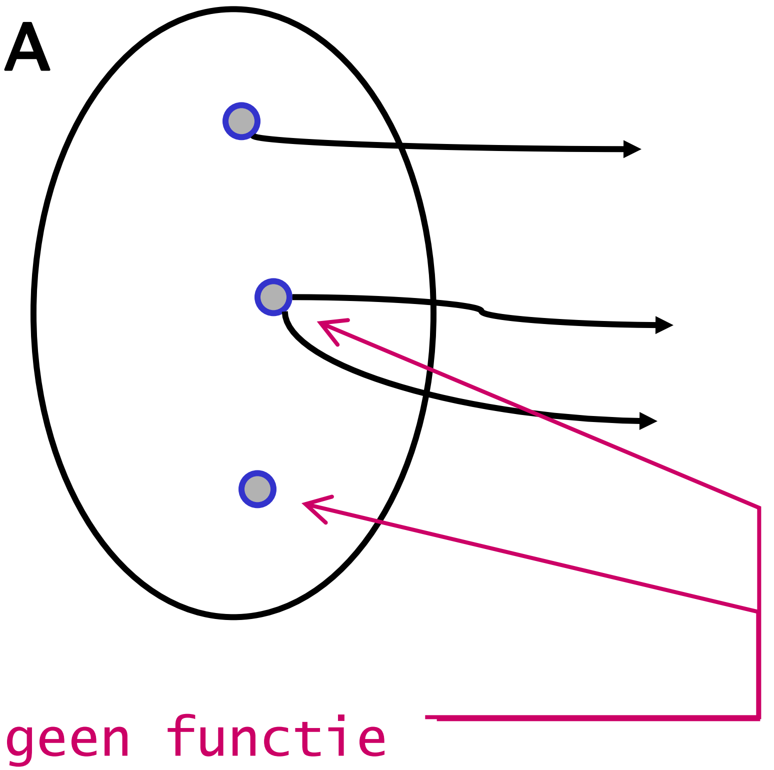
$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(a)=g(a)$ voor alle $a \in A$

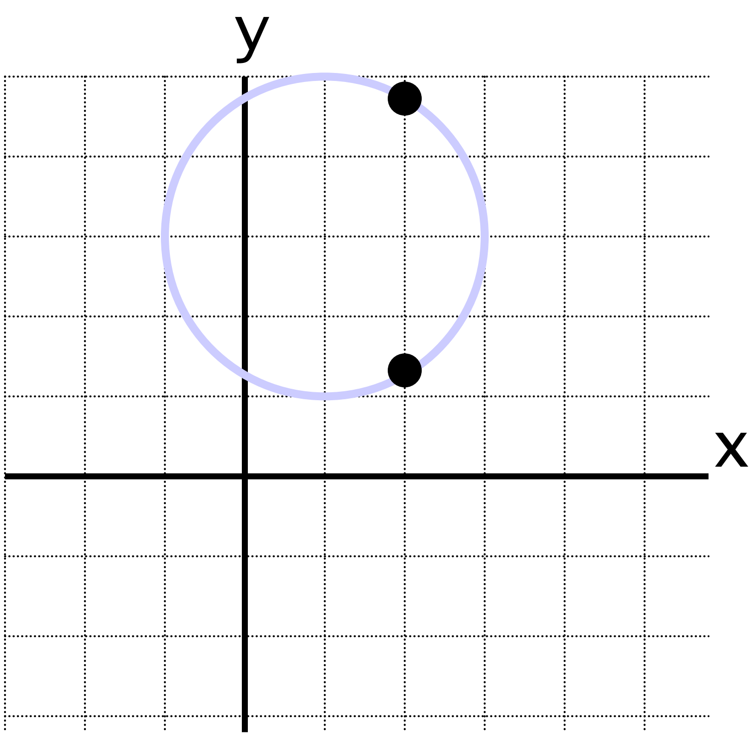
functie als relatie

relatie $R \subseteq A \times B$ heet een *functie* van A naar B als voor iedere $x \in A$ er precies één paar xRy bestaat.

totaal & functioneel

$f: A \to B \quad y = f(x)$

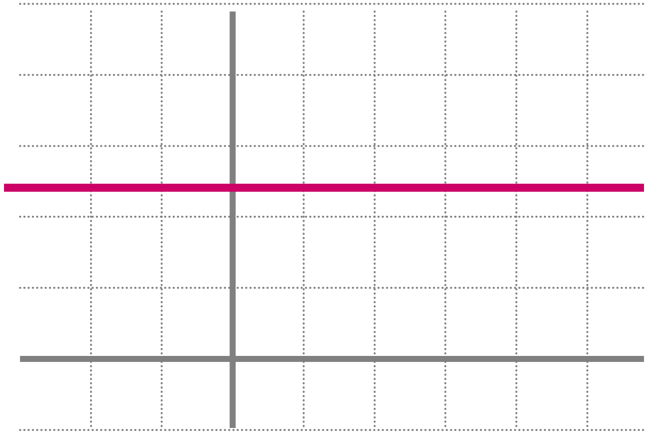


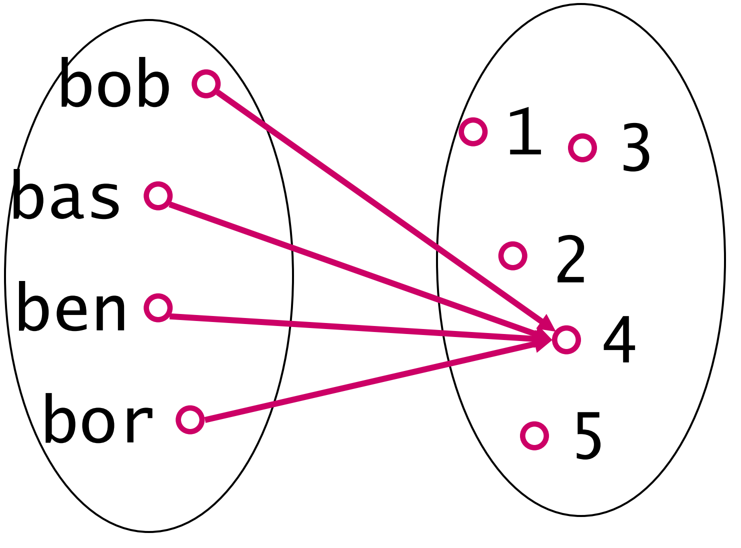


constante functie

functie $f: A \to B$. $f(x) = f(y)$ voor alle $x,y \in A$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & s & d & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



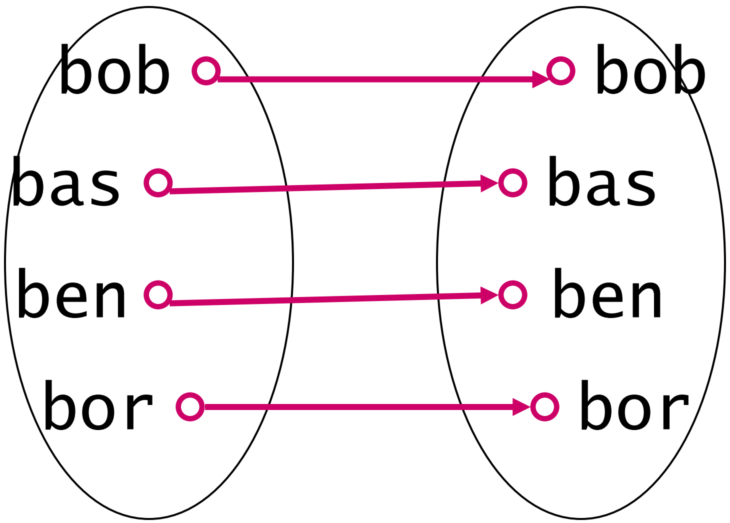


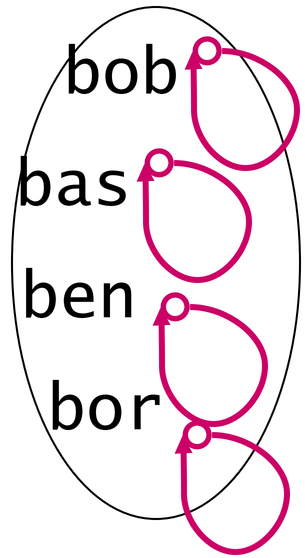
4,4,4,4,4,4,4,…

identiteit

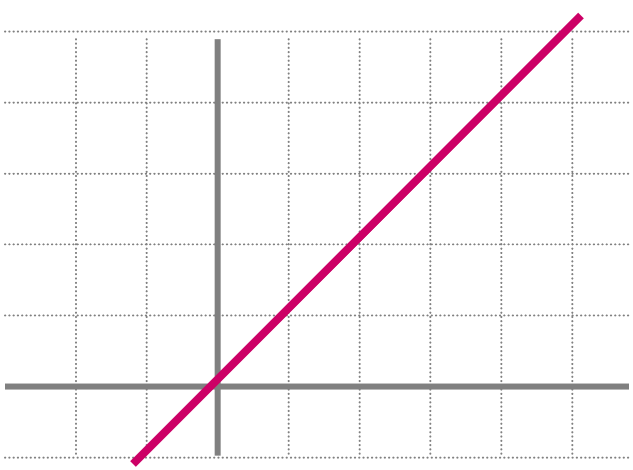
functie $f: A \to A$ met $f(x) = x$ voor alle $x \in A$

identieke functie, *identiteit* op A.   notatie 1_A id_A



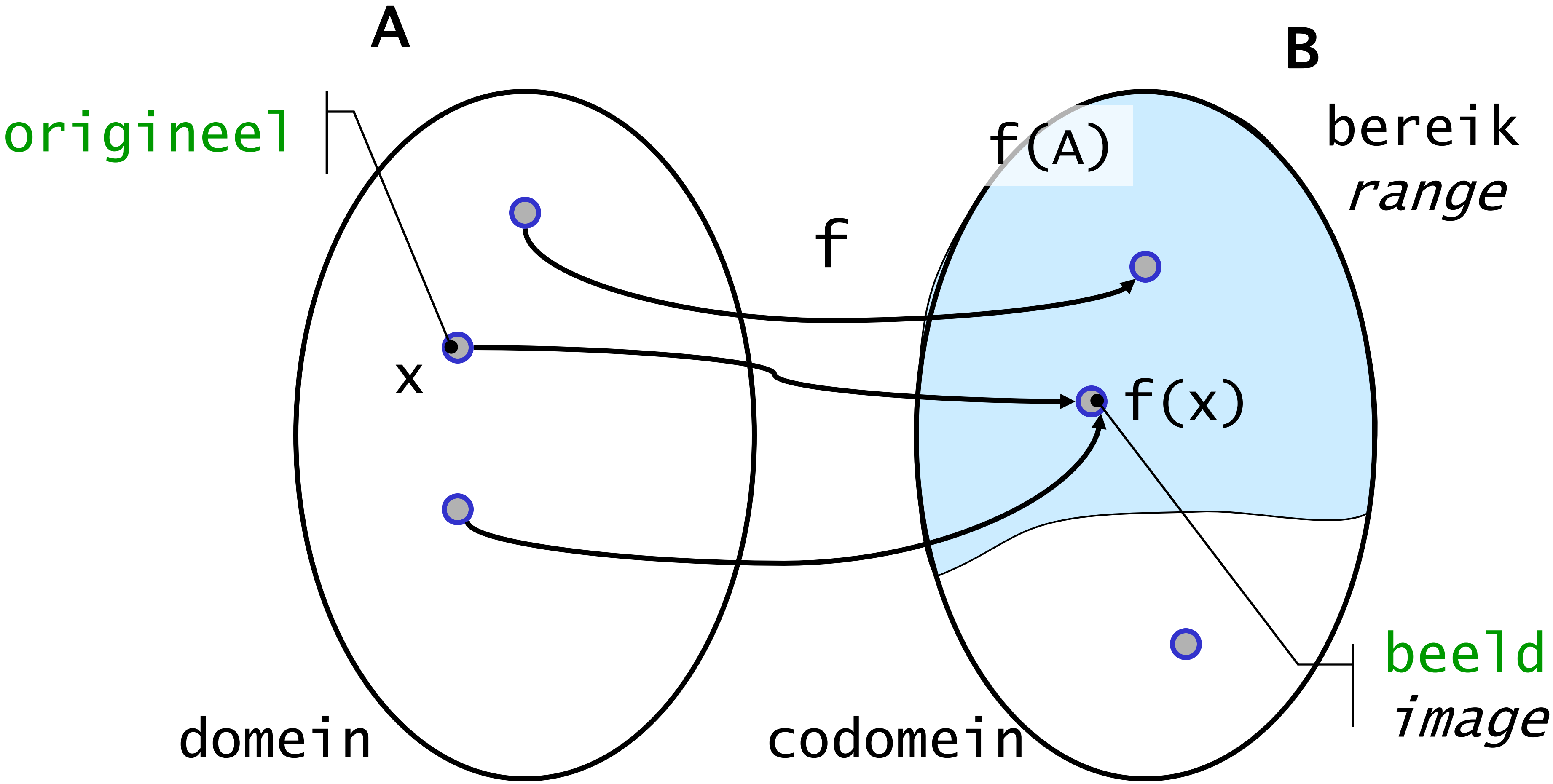


$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



0,1,2,3,4,5,6, …

f:A→B

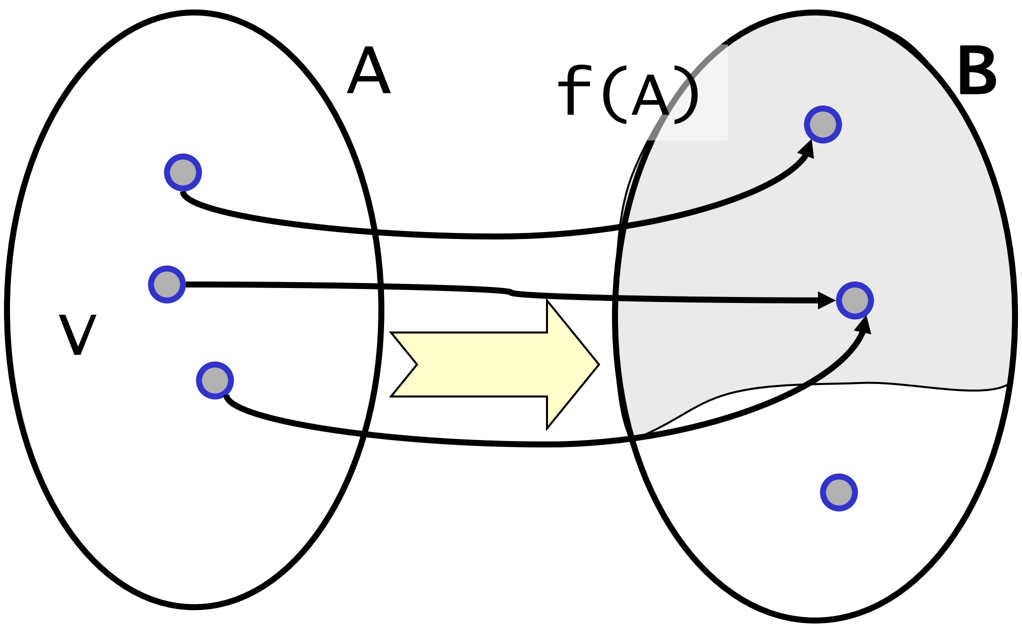

A
B
origineel
f(A)
bereik
range
f
x
f(x)
beeld
image
domein
codomein

bereik

$f: A \rightarrow B$

origineel ⇨ beeld

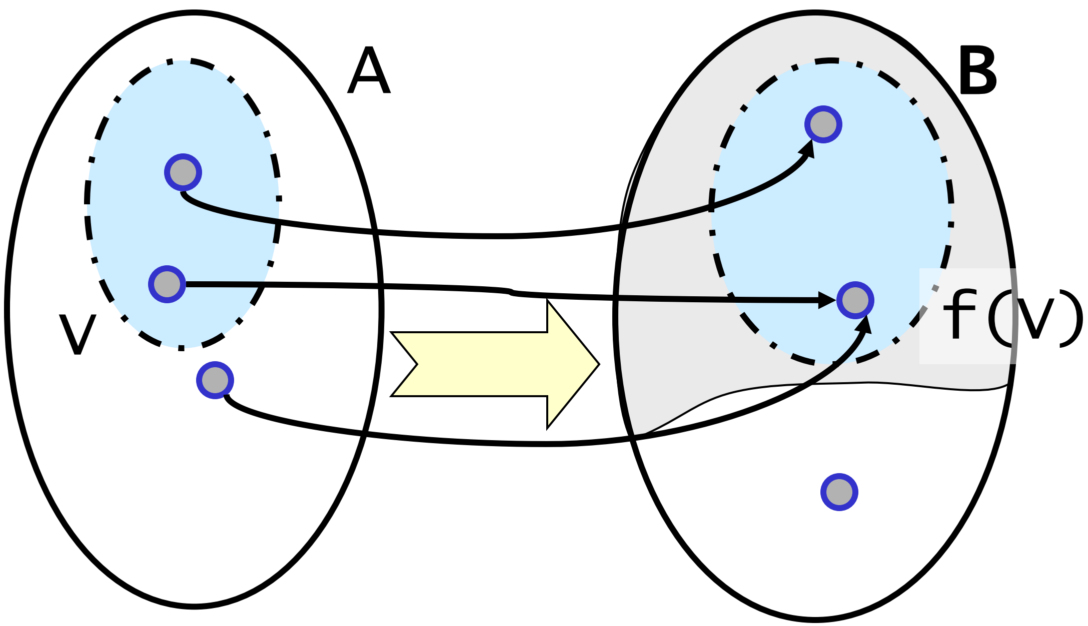
- één element
- verzameling



beeld $V \subseteq A$ $\qquad$ $f: A \to B$

$\{ \, y \in B \mid y = f(x) \text{ voor zekere } x \in V \, \}$

$f(V) = \{ \, f(x) \mid x \in V \, \}$



$V \subseteq A$

$\Rightarrow$

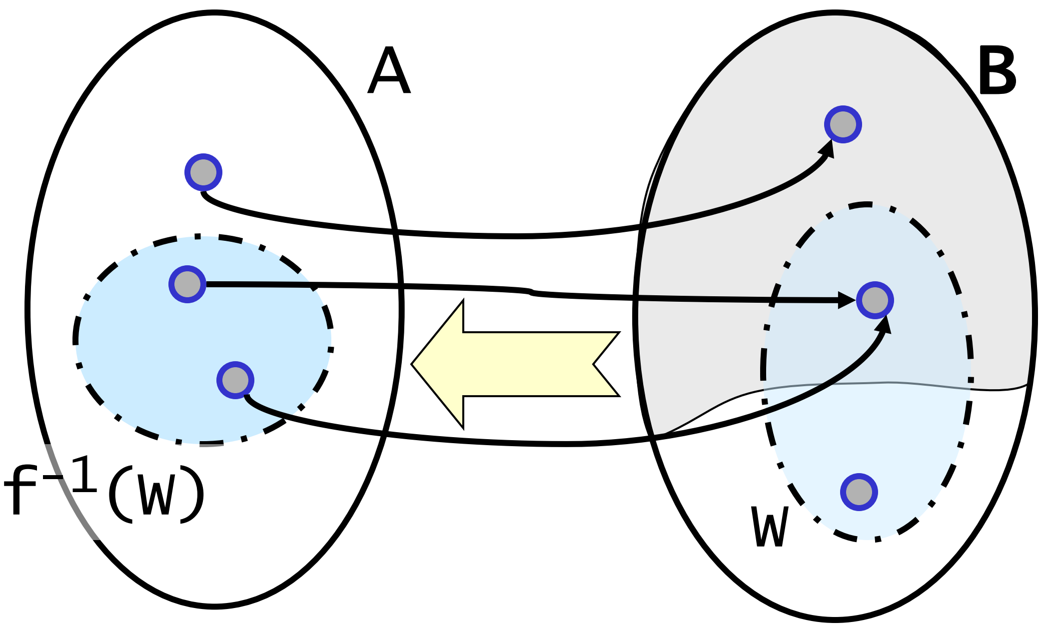
$f(V) \subseteq B$

<u>beeld</u>

origineel $W \subseteq B$ $\qquad f: A \to B$

$\{ x \in A \mid f(x) = y$ voor zekere $y \in W \}$

$f^{-1}(W) = \{ x \in A \mid f(x) \in W \}$

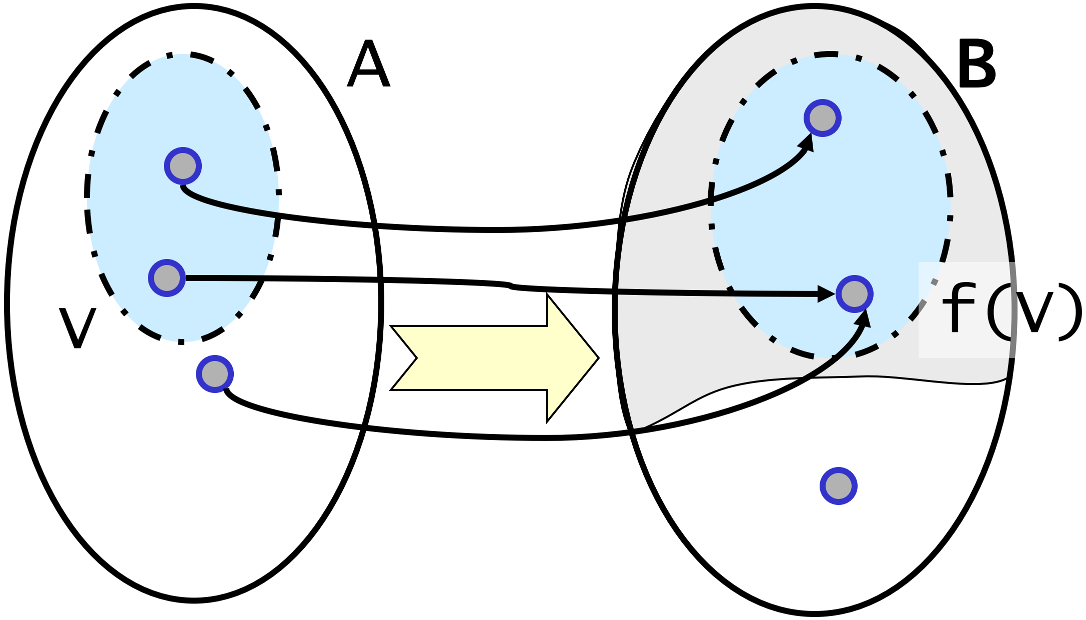


$W \subseteq B$

$\Rightarrow$

$f^{-1}(W) \subseteq A$

volledig origineel

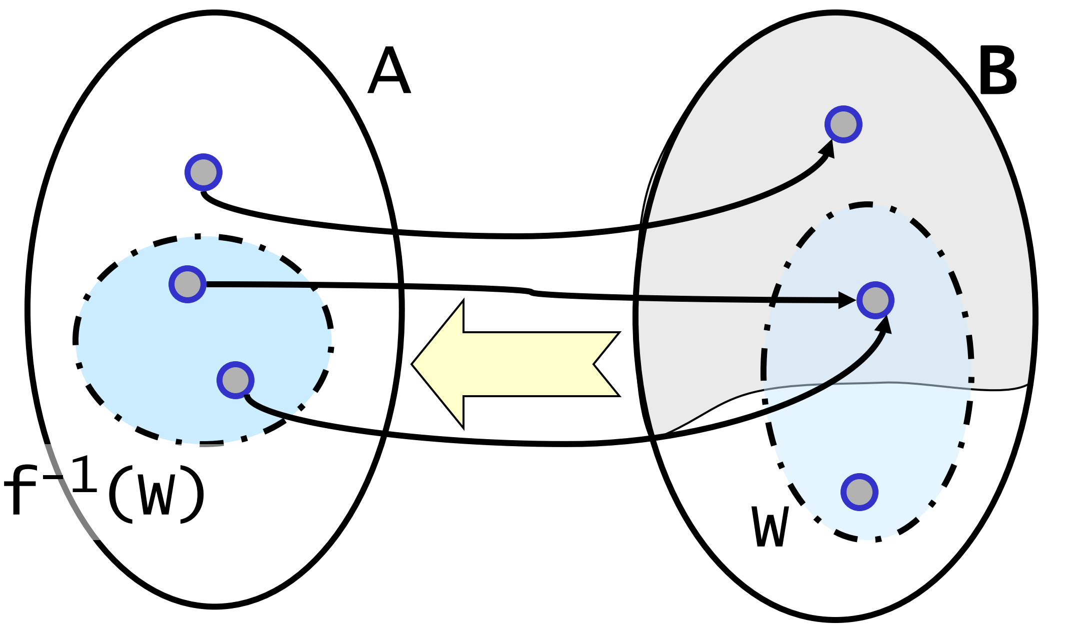


$V \subseteq A$

$\Rightarrow$

$f(V) \subseteq B$

<u>beeld</u>



$W \subseteq B$

$\Rightarrow$

$f^{-1}(W) \subseteq A$

<u>volledig origineel</u>

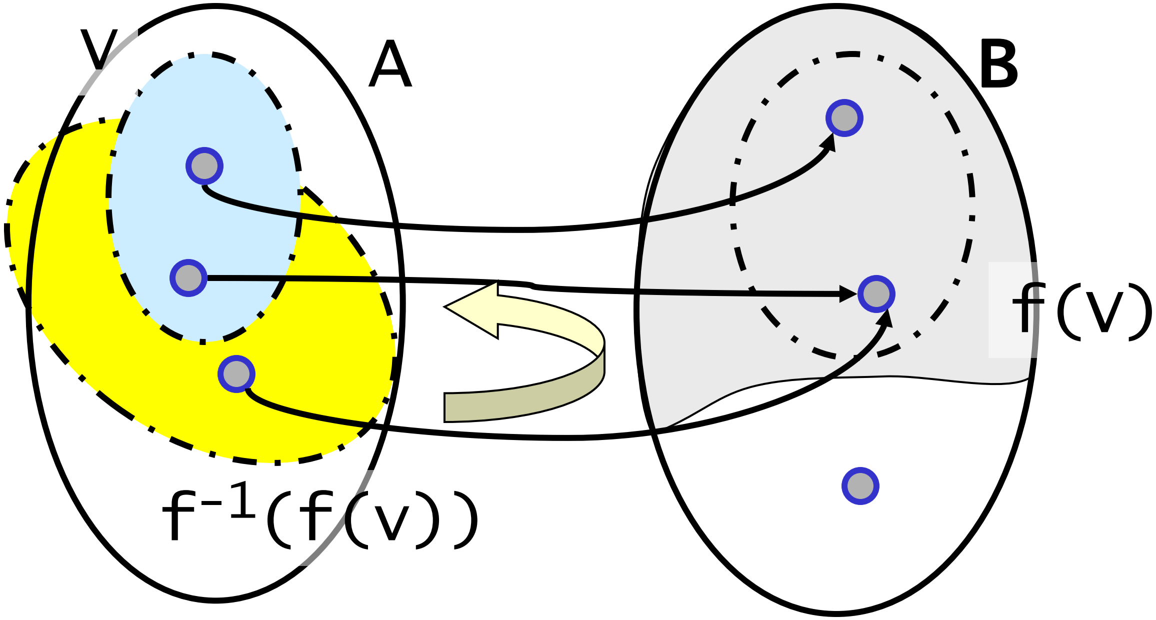
heen-en-weer

Bij een functie $f: A \to B$ kunnen we bij een deelverzameling $V \subseteq A$ van het domein het beeld $f(V)$ bepalen, maar ook bij een verzameling $W \subseteq B$ uit het codomein de originelen $f^{-1}(W)$ (voor zover die bestaan).

Onderstaande slides leggen uit wat er kan gebeuren als je de twee achterelkaar uitvoert: heen-en-weer zeg maar.

Hoe verhouden zich V en $f^{-1}(f(V))$?
Idem, voor W en $f(f^{-1}(W))$?

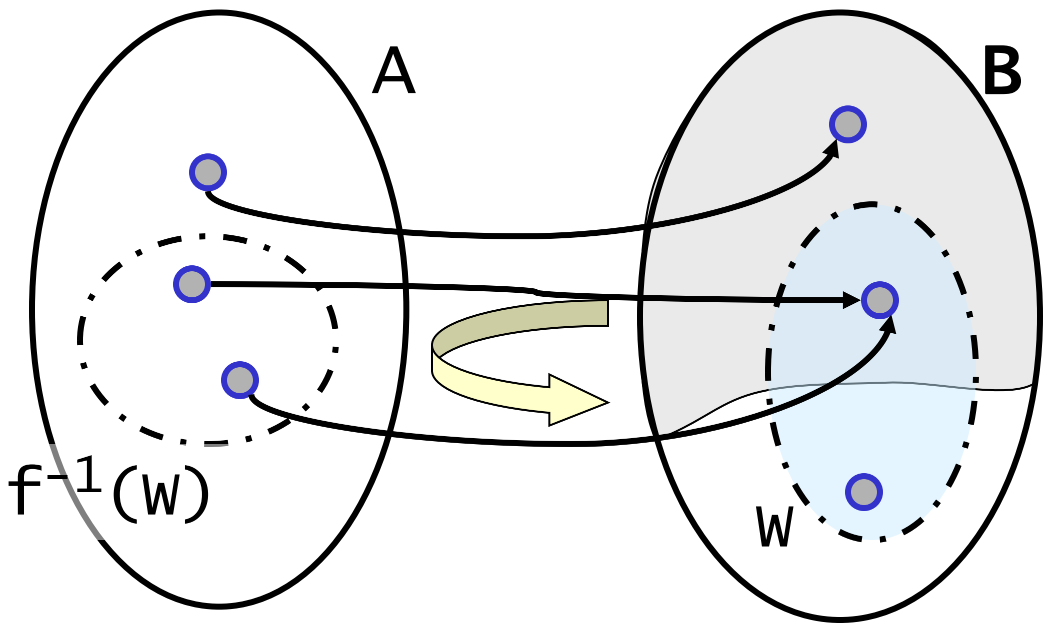
In het algemeen geldt een inclusie (één kant op) maar als de functie f een speciale eigenschap heeft is er gelijkheid.



$V \subseteq A$

$\Rightarrow$

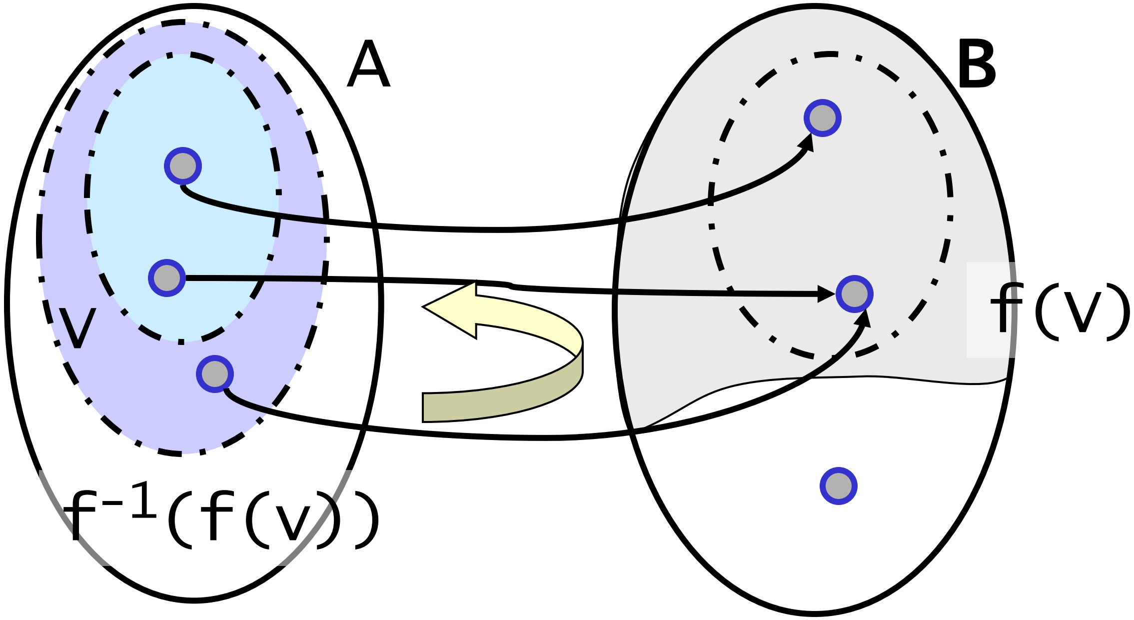
$V \ ? \ f^{-1}(f(V))$



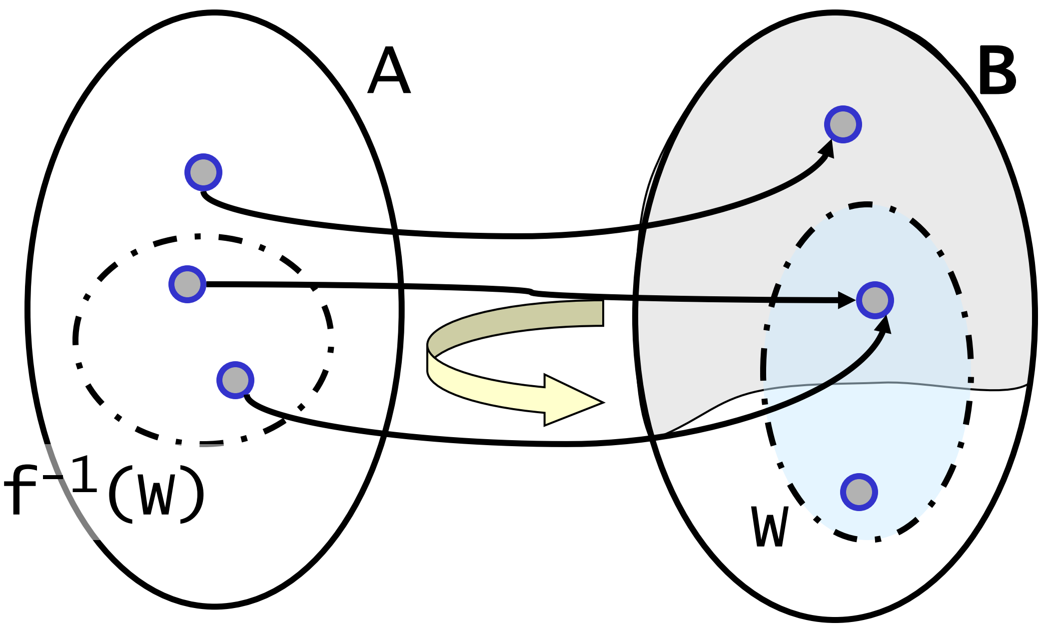
$W \subseteq B$

$\Rightarrow$

$f(f^{-1}(W)) \ ? \ W$



$$V \subseteq A$$
$$\Rightarrow$$
$$V \subseteq f^{-1}(f(v))$$

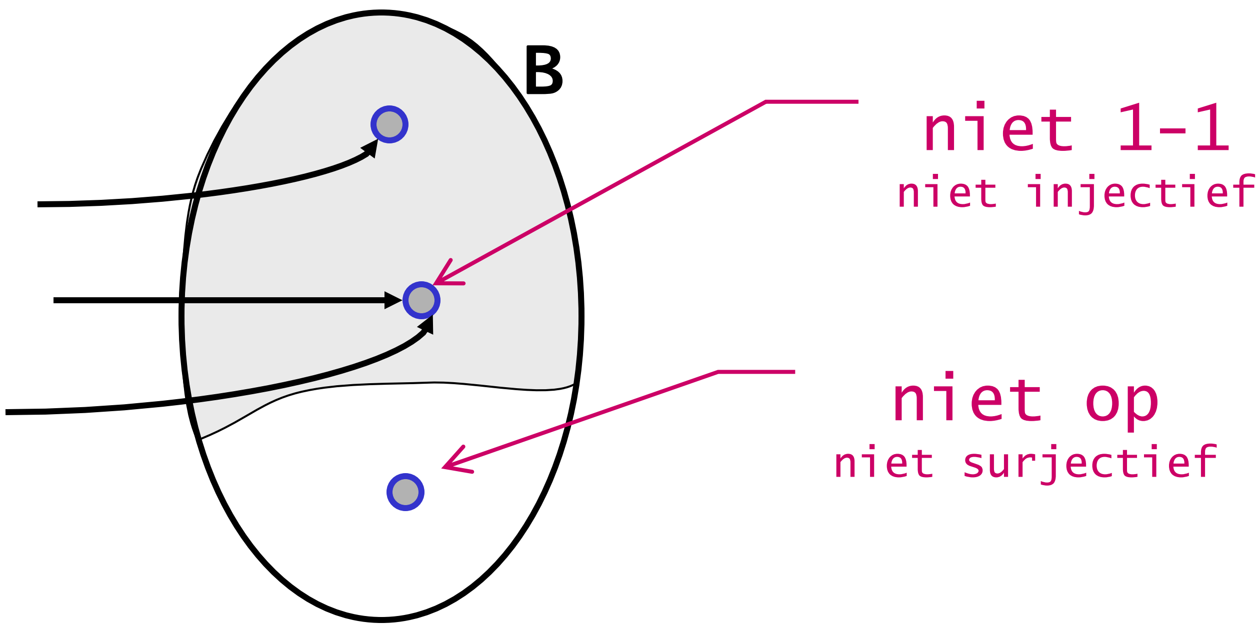


$$W \subseteq B$$
$$\Rightarrow$$
$$f(f^{-1}(W)) \subseteq W$$

$$f(f^{-1}(W)) = W \cap f(A)$$

Een functie $f: A \to B$ heet *surjectief* (of '*op*') als $f(A) = B$, met andere woorden, als er voor iedere $y \in B$ een origineel $x \in A$ bestaat.

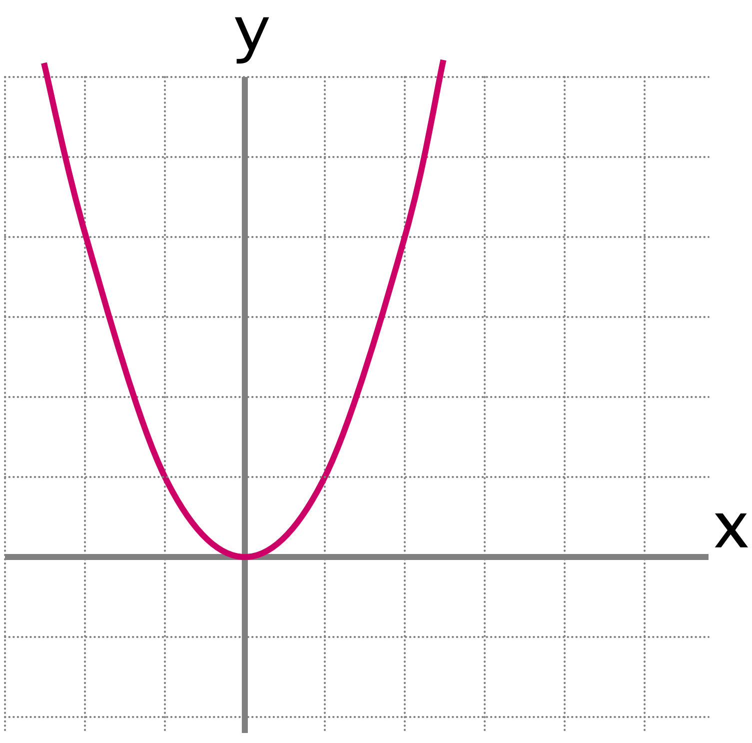
Een functie $f: A \to B$ heet *injectief* (of *een-eenduidig* of *een-op-een*) als voor alle $x, y \in A$ geldt dat uit $f(x) = f(y)$ volgt dat $x = y$.

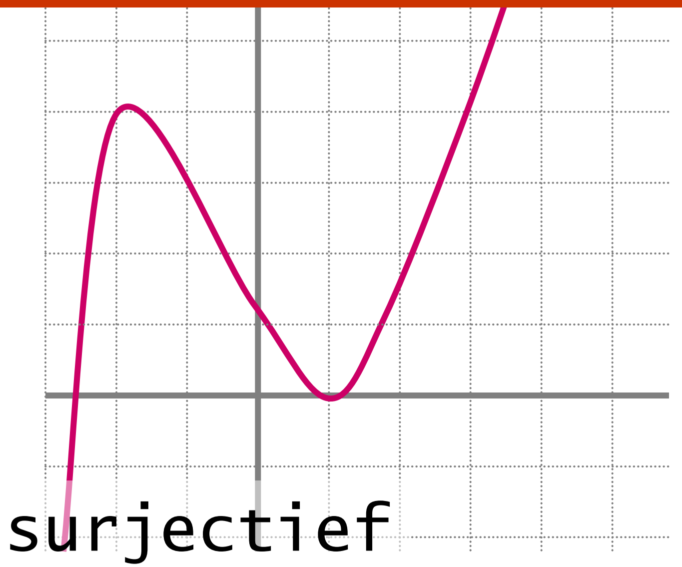


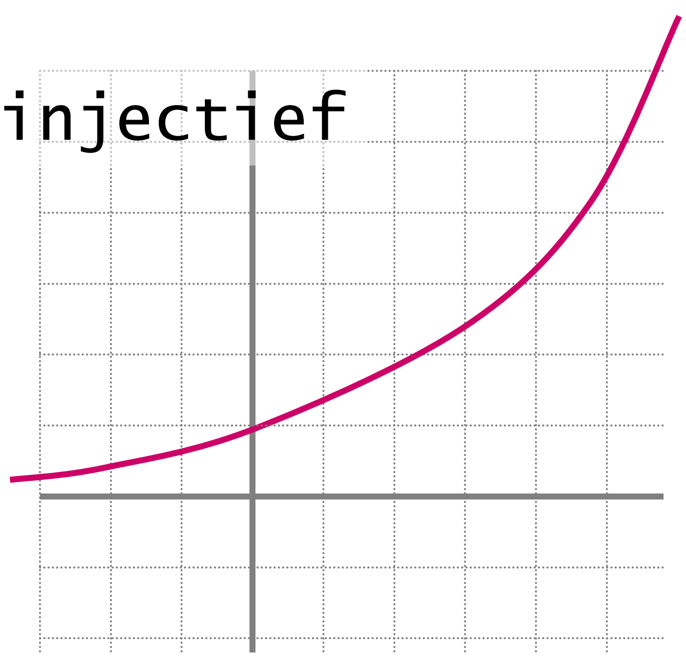
voorbeeld

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

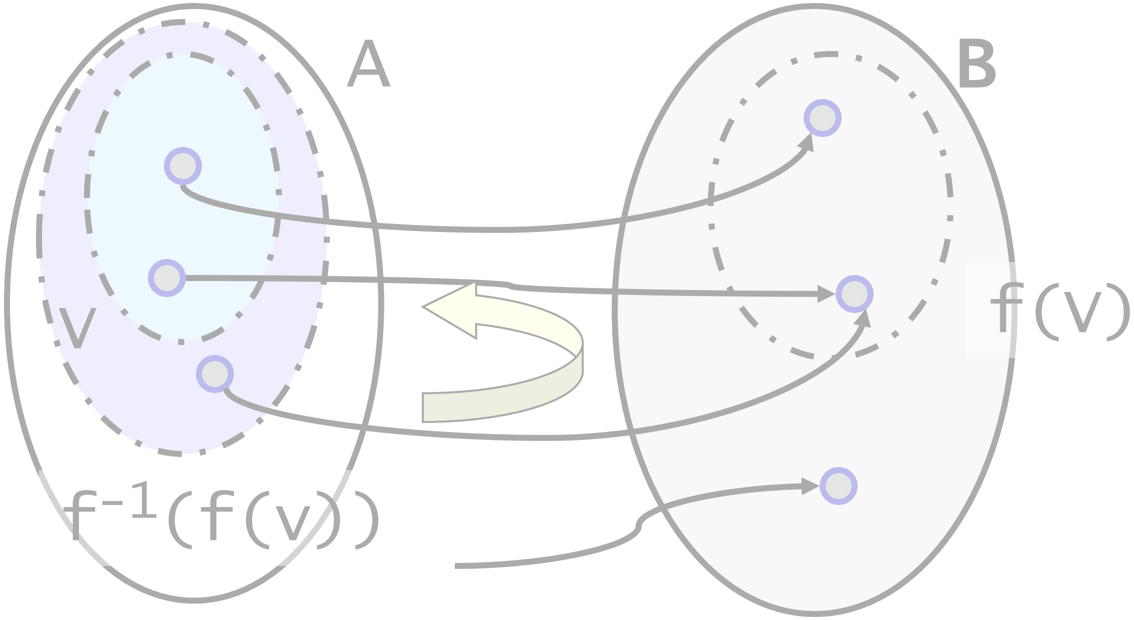
$$f(x) = x^2$$







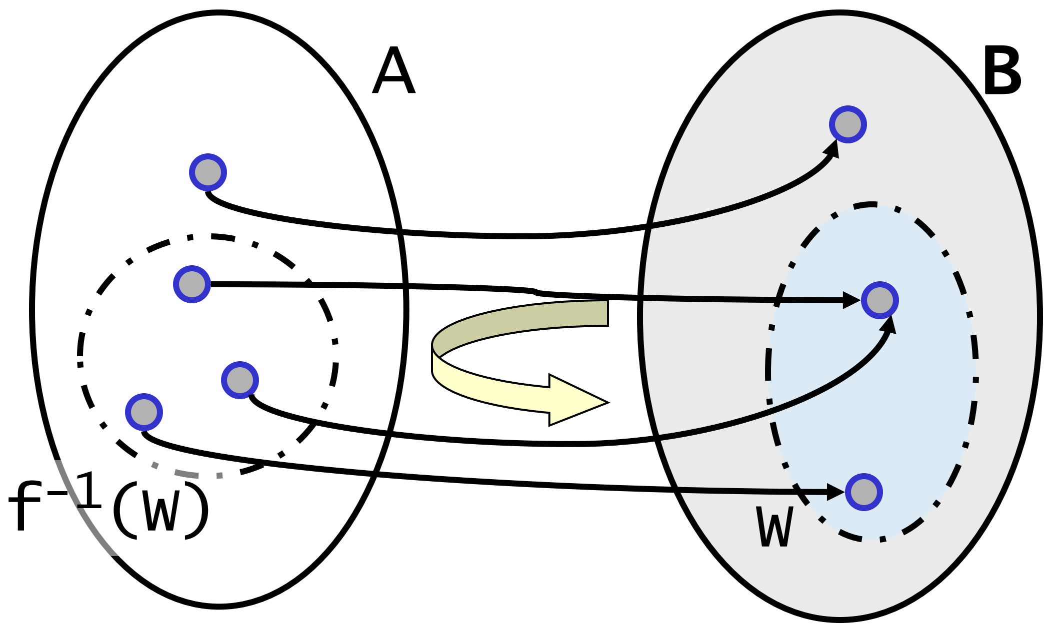
f surjectief ‘op’



$V \subseteq A$

$\Rightarrow$

$V \subseteq f^{-1}(f(V))$

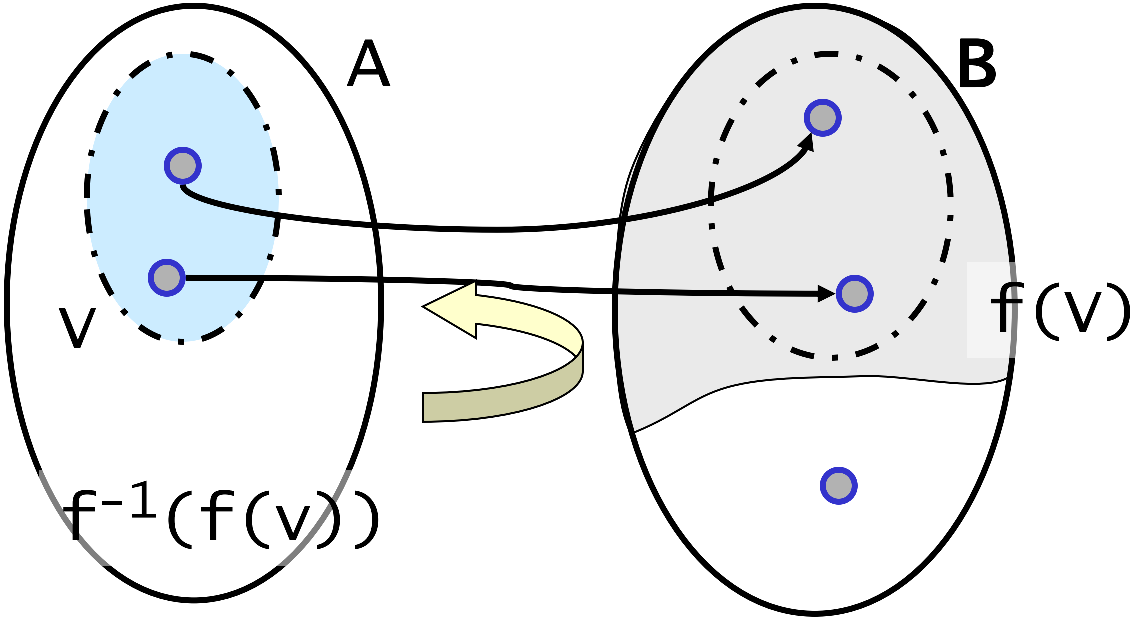


$W \subseteq B$

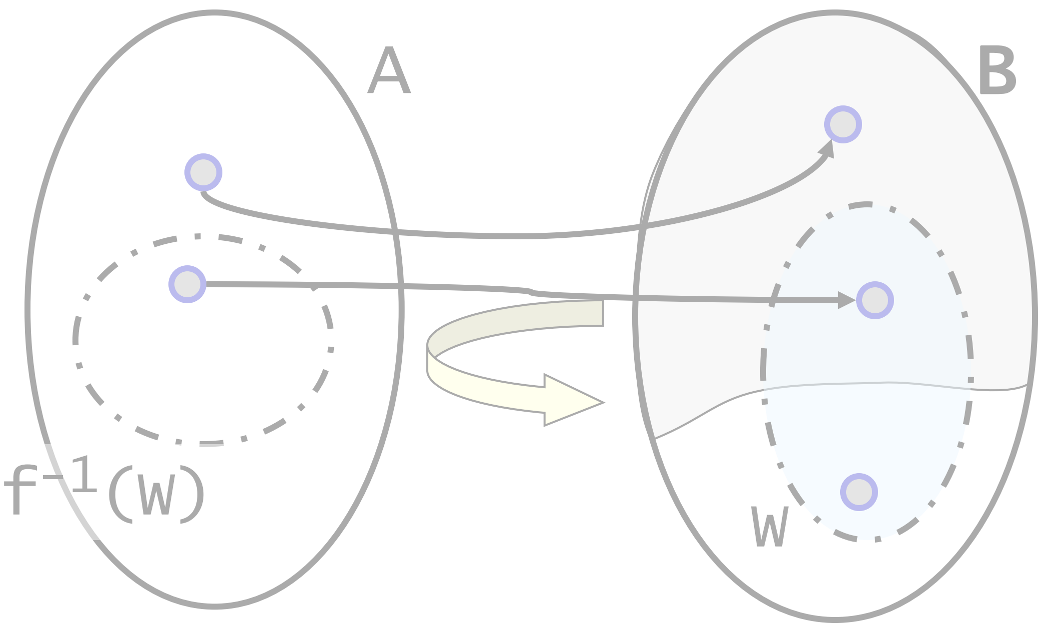
$\Rightarrow$

$f(f^{-1}(W)) = W$

f injectief '1-1'



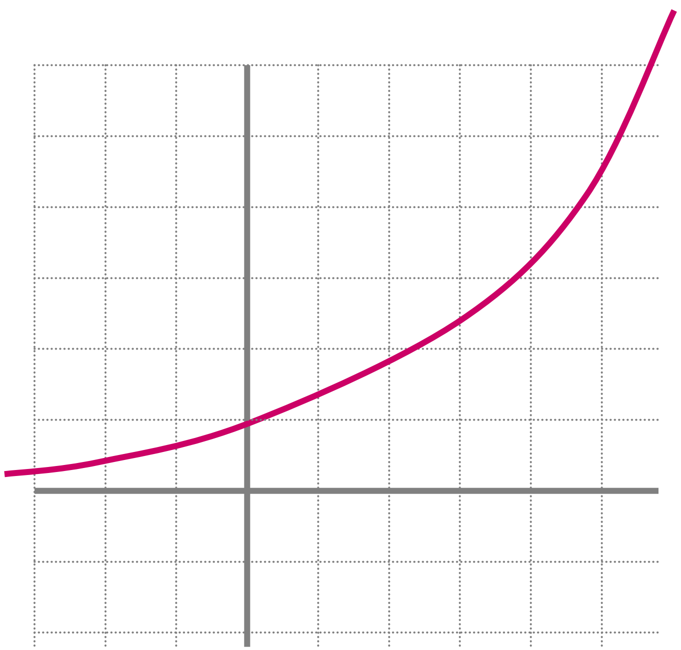
$$V \subseteq A$$
$$\Rightarrow$$
$$V = f^{-1}(f(v))$$



$$W \subseteq B$$
$$\Rightarrow$$
$$f(f^{-1}(W)) \subseteq W$$

Een functie $f\colon A \to B$ heet *bijectief* als f zowel surjectief als injectief is.

$$V \subseteq A, \quad W \subseteq B$$
$$V = f^{-1}(f(V))$$
$$W = f(f^{-1}(W))$$

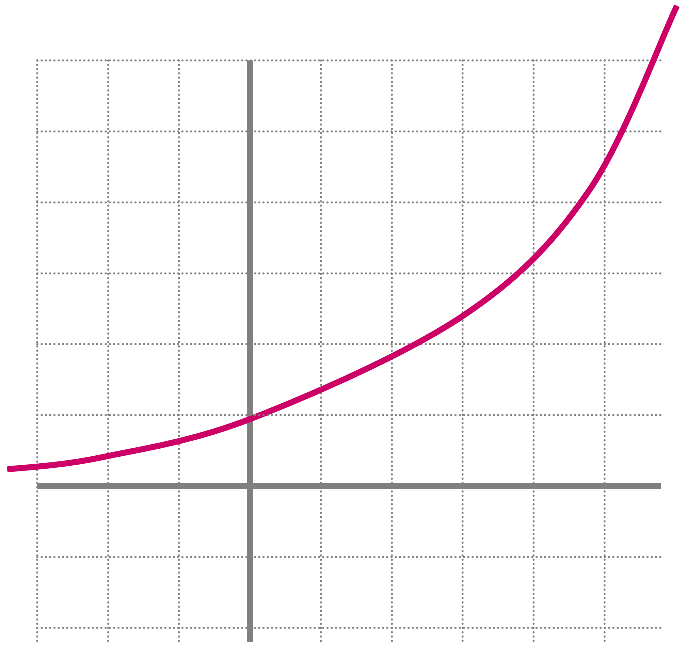


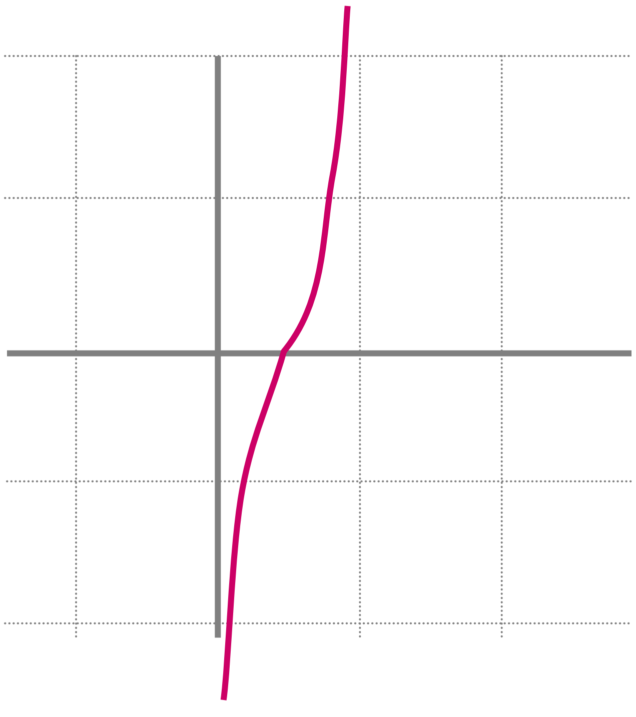
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ √

voorbeeld

bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$
bijectie tussen $\langle 0,1 \rangle$ en $\mathbb{R}$



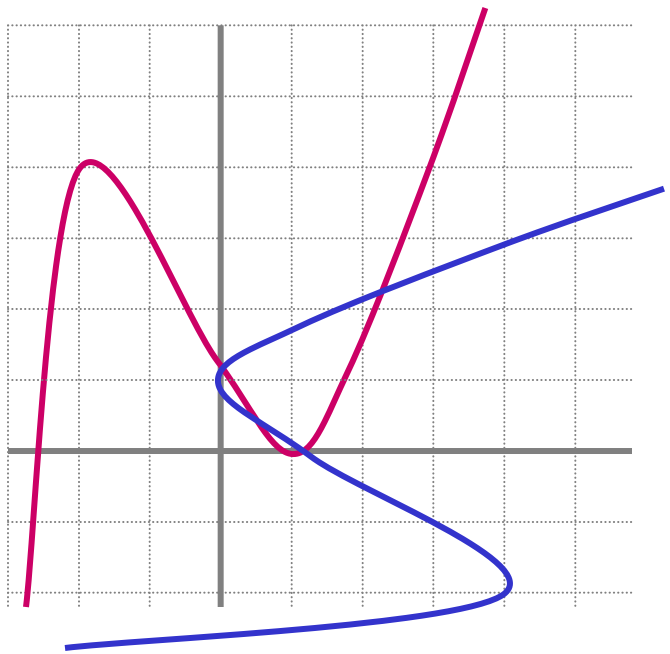


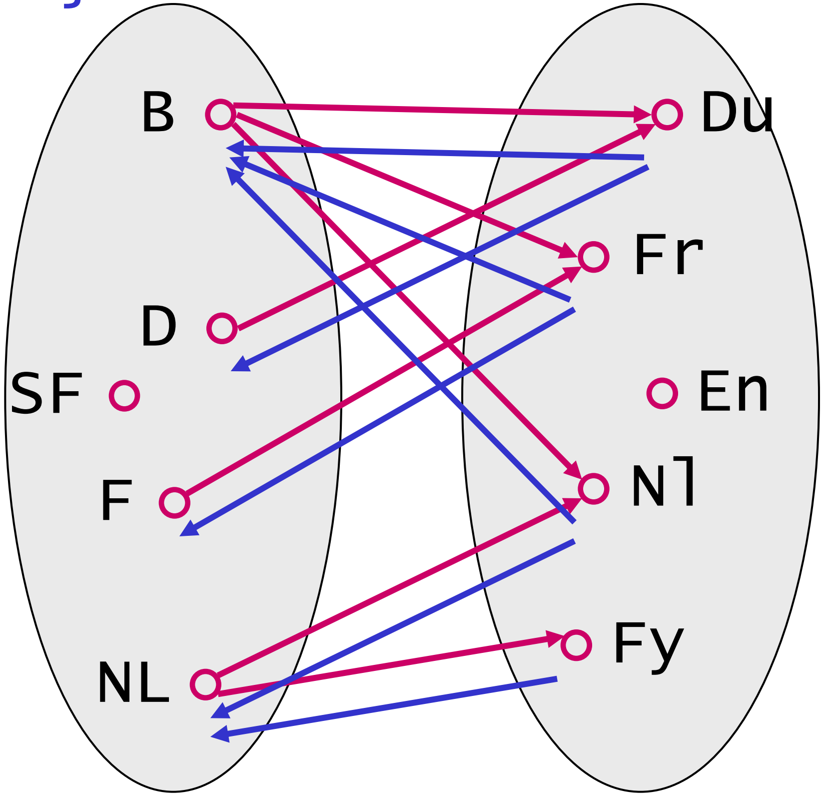
$R \subseteq A \times B$

$R^{-1} \subseteq B \times A$ *inverse relatie*

$bR^{-1}a$ desdals aRb.

$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$



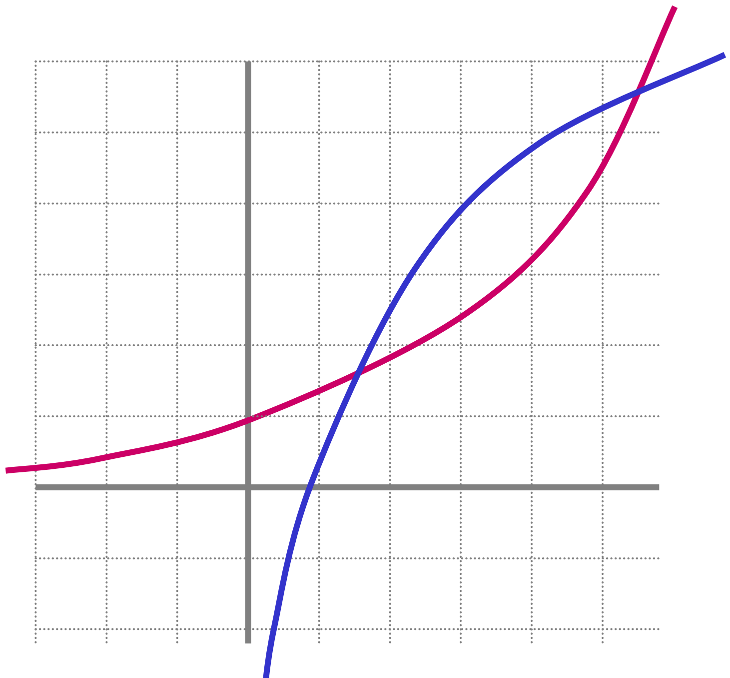


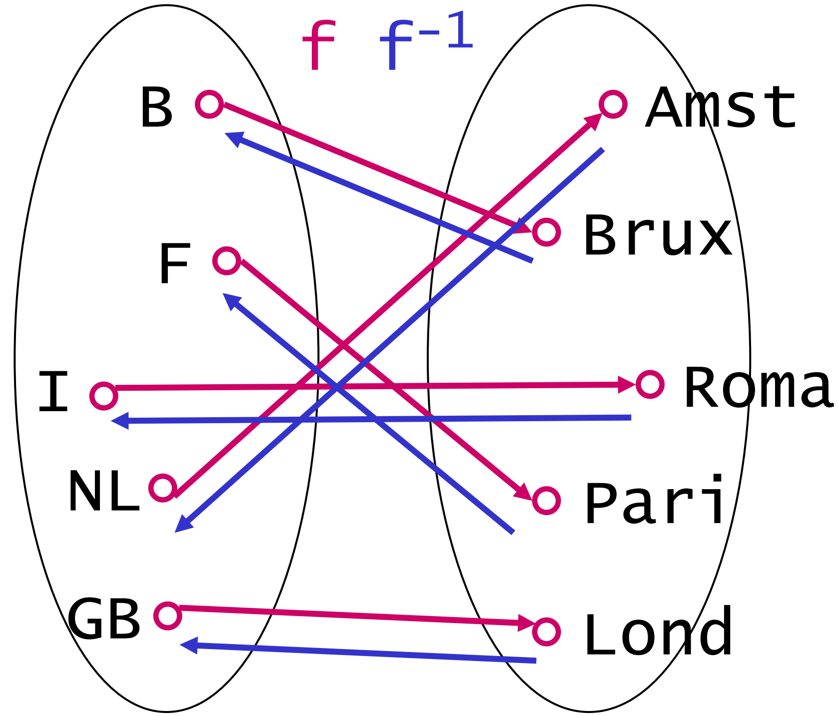
inverse

De inverse van een relatie is altijd gedefinieerd.

De inverse van een functie is dan ook altijd een relatie, maar wanneer is het weer een functie?

f functie $\Rightarrow$ f^{-1} functie !?





$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ $f^{-1}: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$

dwz. als functie

Theorem 3.1

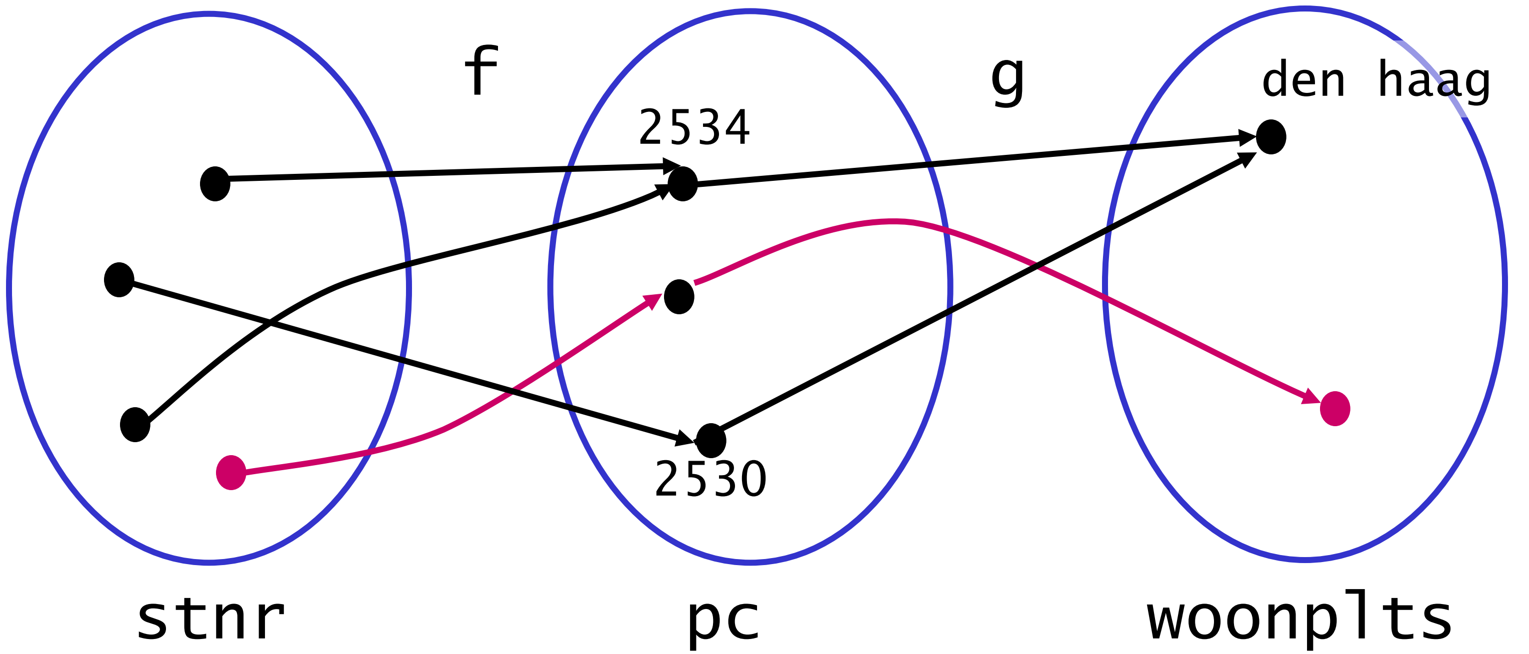
De inverse functie van $f: A \to B$ bestaat desdals f een bijectie is (1-1 en op)

samenstelling

$f: A \to B$ en $g: B \to C$ functies.
De *samenstelling* van f en g,
genoteerd $g \circ f$ ('g na f') van A naar C is
gedefinieerd door $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ voor alle $x \in A$

volgorde !

$x \; R \circ S \; y$ $y = g \circ f \; (x)$



samenstelling

De notatie van samenstelling is wat ambigu. Dat komt omdat functies van rechts naar links gelezen worden: $y = g \circ f(x) = g(f(x))$.

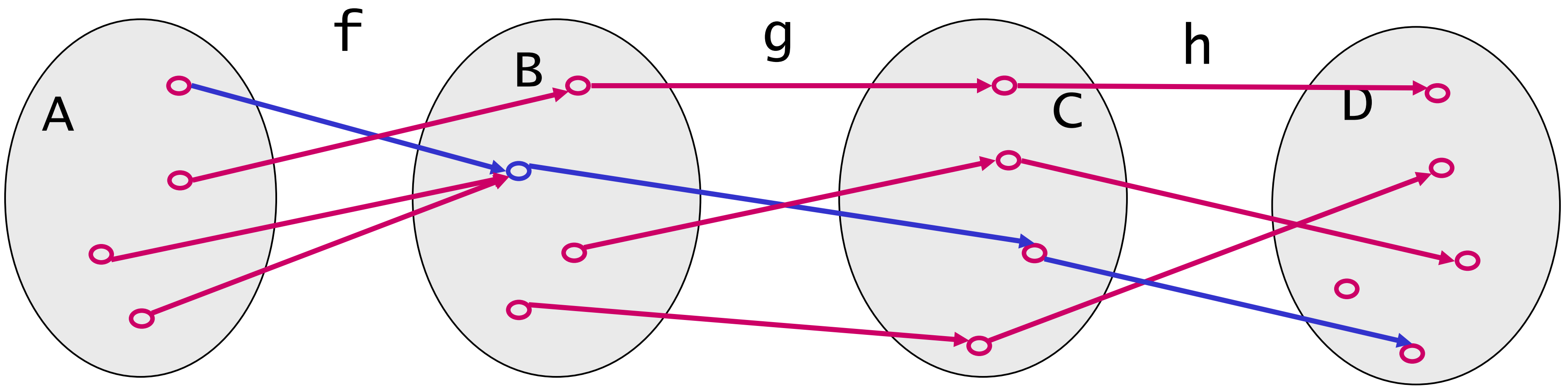
vergelijk $x \; R \circ S \; y$

$g \circ f$ (‘g na f’) voor functies (eerst f dan g)

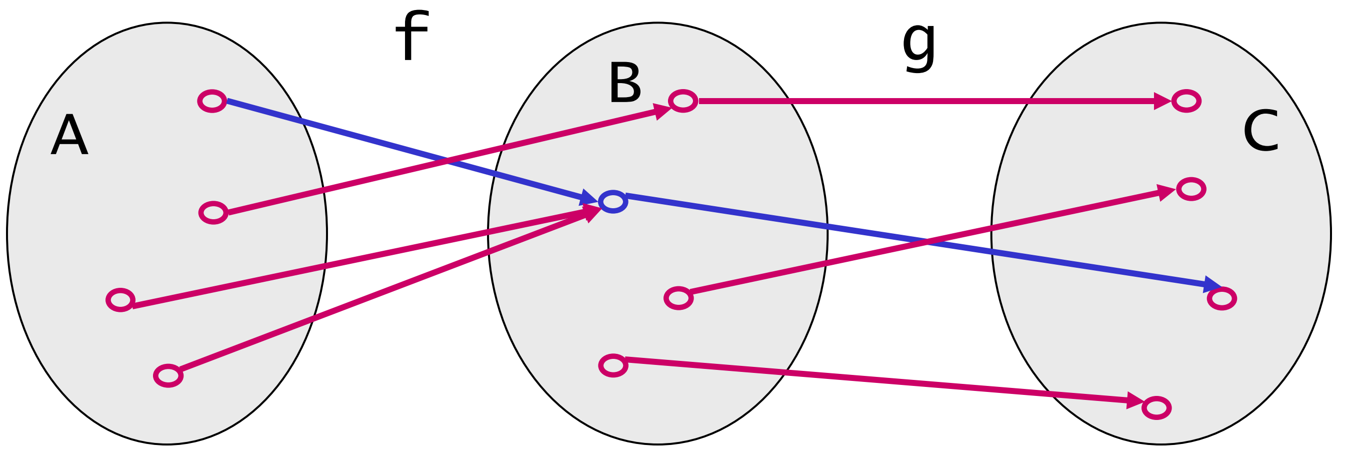
$R \circ S$ (‘R dan S’) voor relaties (eerst R dan S)

haakjes niet nodig

Samenstellen van functies is associatief:
als $f: A \to B$, $g: B \to C$ en $h: C \to D$ functies zijn,
dan $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.



laat f: A → B, g: B → C functies zijn
als f en g surjectief 'op' zijn, dan ook g∘f.
als f en g injectief '1-1' zijn, dan ook g∘f.



Problem 3.9

§3.5 rijen

1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,7,9,3,2,3,8,4,6,2,6,4,3,3,…

$a : \mathbb{N} \to A$ $a : \mathbb{N}^+ \to A$

$a(0),\ a(1),\ a(2),\ \ldots$

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ indices

$\{\ a_n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$

$(\ a_n\ )_{n \in \mathbb{N}}$

eindige rij (n-tupel)

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$

§3.5 rijen

rijen horen bij het hoofdstuk functies omdat het afbeeldingen zijn van de natuurlijke getallen (of eventueel de positieve gehele getallen) $a : \mathbb{N} \to A$

Er wordt soms een verzameling notatie gebruikt voor rijen $\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ maar dat vind ik niet passen: een rij is geordend en een verzameling niet.

De notatie voor het i-de element van de rij is $a(i)$ als we functies gewend zijn of a_i .

De sigma notatie geeft herhaald optellen weer, lopende variable i, start- en stopwaarde.
Het is goed te vergelijken met een *for-loop*.

we gaan dit later nog vaker zien, in het onderdeel ‘inductie’

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \\ \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 , \quad \sum_{i=1}^{0} a_i = 0\end{array}}$$

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \\ \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 , \quad \sum_{i=1}^{0} a_i = 0 \end{array}}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{1 \le i \le n} A_i$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ \ x \mid x \in A_i \ \text{voor} \ i \in I \ \}$$

rij: opeenvolgende termen
rekenkundig: verschil termen constant
1,2,3,4,5, …
meetkundig: verhouding constant
1,2,4,8,16, …
reeks: opeenvolgende sommen van rij-elementen

1,2,3,4,5, … -> 1,3,6,10,15, …
1,2,4,8,16, … -> 1,3,7,15,31, …

formule voor rekenkundige reeks:
'gemiddelde term maal aantal termen', waarbij
'gemiddelde' natuurlijk (eerste + laatste) / 2

$a_0 = a$
$a_n = a_{n-1} + v \quad (n \geq 1)$

rij, termen, verschil v

$a_n = a + n \cdot v$

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, …

$$\sum_{i=0}^{n} i = \tfrac{1}{2} n(n+1)$$

reeks:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a + iv) = \tfrac{1}{2}(2a + nv)(n+1)$$

eerste plus laatste, maal aantal termen, gedeeld door 2

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 0 & + & 1 & + \ldots & n-1 & + & n \\ S_n & = & n & + & n-1 & + \ldots & 1 & + & 0 \\ \hline 2S_n & = & n & + & n & + \ldots & n & + & n = n(n+1) \end{array}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a + iv) = \tfrac{1}{2}(2a + nv)(n + 1)}$$

onderstaande formule is een speciaal geval (a=0, v=1)

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} i = \tfrac{1}{2} n(n + 1)}$$

het bewijs is ook voor dat geval: noem die som S_n.
er zijn n+1 termen, die paarsgewijs elk tot n optellen (dubbel geteld)

$$\begin{array}{rcccccccccc}
S_n & = & 0 & + & 1 & + & \ldots & n-1 & + & n & \\
S_n & = & n & + & n-1 & + & \ldots & 1 & + & 0 & \\
\hline
2S_n & = & n & + & n & + & \ldots & n & + & n & = n(n+1)
\end{array}$$

Het algemene geval. Term i en term n-i zijn opgeteld steeds (a+iv)+(a+(n-i)v) = 2a+nv . Maal het aantal termen, gedeeld door twee.

$a_0 = a$
$a_n = r \cdot a_{n-1} \quad (n \geq 1)$

rij, termen, reden $r \in \mathbb{R}$

$a_n = a \cdot r^n$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

1, 0.5, 0.25, 0.125, …

reeks:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$$

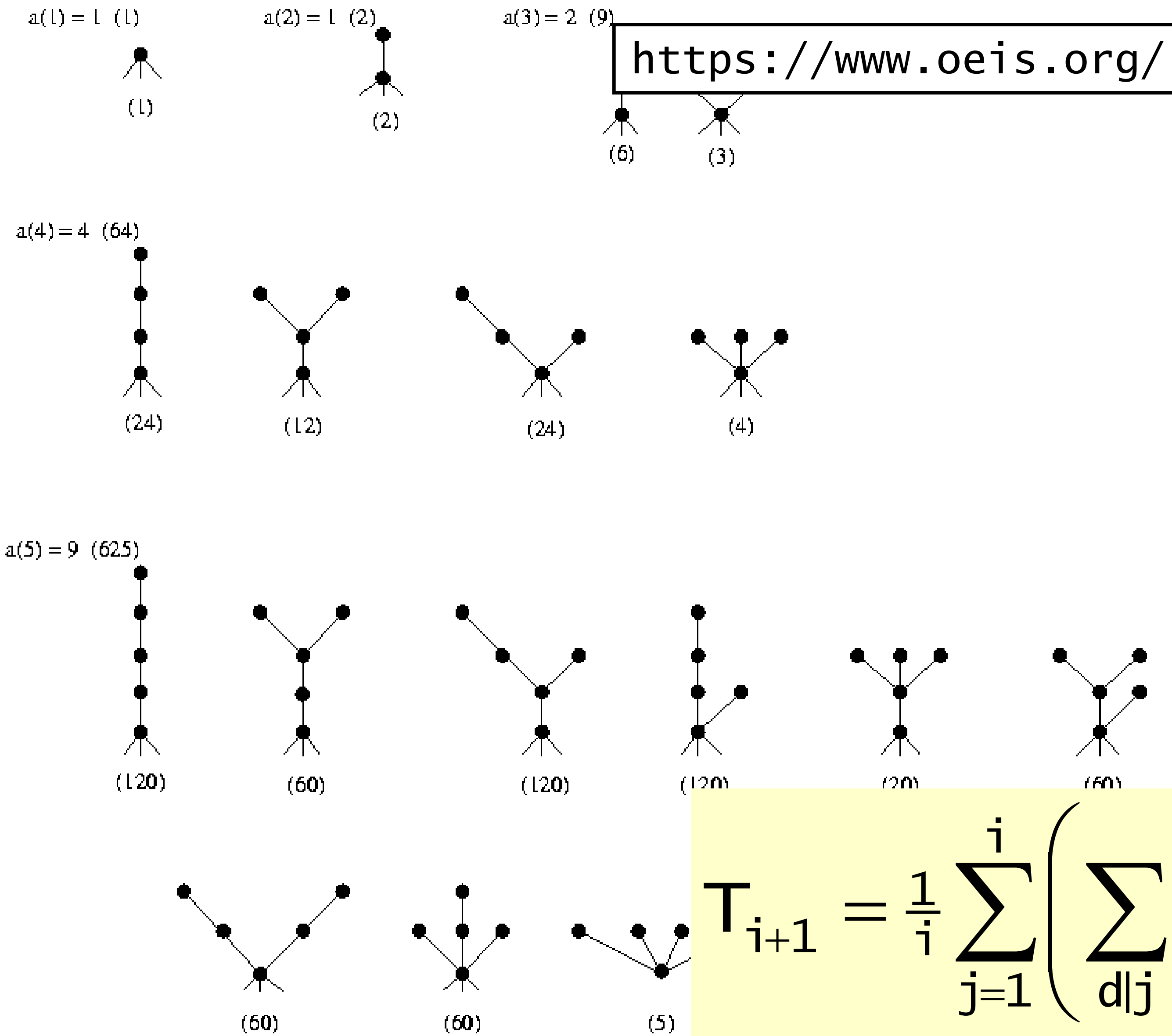
$$
\begin{array}{rcl}
rS_n & = & r^1 + r^2 + \ldots r^n + r^{n+1} \\
S_n & = & r^0 + r^1 + \ldots r^{n-1} + r^n \\
\hline
(r-1)S_n & = & r^{n+1} - r^0
\end{array}
$$

1, 1, 2, 4,

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

115, 286,

https://www.oeis.org/ ‘Sloane’



4766, 12486,
32973,
87811,
235381,
634847,
1721159,
4688676,
12826228,
35221832,
97055181,
268282855,
743724984,
2067174645,
,
9,
9,
08,

$$T_{i+1} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{d|j} d T_d \right) T_{i-j+1}$$

A000081 Number of rooted trees with n nodes (or connected functions with a fixed point). ,

functie $(\forall x \in A)[$
$(\exists y \in B)(\ xfy\ )\ \wedge$
$\neg(\exists y \in B)(\exists z \in B)(y \neq z\ \wedge\ xfy\ \wedge\ xfz)$
$]$

$\forall$ ‘voor alle …’
$\exists$ ‘er is …’

op $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(\ y = f(x)\ )$
$(\forall y)_B(\exists x)_A(\ xfy\ )$

1-1 $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\ f(x) = f(y)\ \Rightarrow\ x = y\ )$
$(\forall x)_A(\forall y)_A(\ f(x) = f(y)\ \Rightarrow\ x = y\ )$

$\neg(\exists x)_A(\exists y)_A(\ x \neq y\ \wedge\ f(x) = f(y)\ )$

? $(\exists y)_B(\forall x)_A(\ y = f(x)\ )$

? $(\exists y)_B(\forall x)_A(\ y \neq f(x)\ )$

nee, logica is een ander vak.
dit is een kleine test of we met wat gezond verstand kunnen lezen hoe je basis-eigenschappen definieert.

specificatie ‘abstract datatype’

De volgende paar slides zijn ‘extra’.

(1) Een taal voor het opstellen van formele specificaties is Z. De taal maakt gebruik van verzamelingen, relaties, …

(2) … en functies, in verschillende typen. Let op het gebruik van méér pijltjes dan \LaTeX standaard heeft, of te vinden zijn in unicode font. Wat mij betreft niet een erg gelukkige keuze, maar smaken verschillen.

specification

BirthdayBook

$known : \mathbb{P}\ NAME$

$birthday : NAME \pfun DATE$

$known = \mathrm{dom}\ birthday$

$known = \{ John, Mike, Henry \}$
$birthday = \{ John \mapsto 25\text{-}Mar, Mike \mapsto 01\text{-}Aug, Henry \mapsto 01\text{-}Aug \}$

AddBirthday

$\Delta BirthdayBook$

$name? : NAME$

$date? : DATE$

$name? \notin known$

$birthday' = birthday \cup \{ name? \mapsto date? \}$

$known' = known \cup \{ name? \}$

FindBirthday

$\Xi BirthdayBook$

$name? : NAME$

$date! : DATE$

$name? \in known$

$date! = birthday(name?)$

$known' = known$
$birthday' = birthday$

InitBirthdayBook

BirthdayBook

$known = \varnothing$

Remind

$\Xi BirthdayBook$

$today? : DATE$

$cards! : \mathbb{P}\ NAME$

$cards! = \{ n : known \mid birthday(n) = today? \}$

$$m \in \{ n : known \mid birthday(n) = today? \} \Leftrightarrow m \in known \land birthday(m) = today?$$

Zed, not Zee

The tool-kit begins with the basic operations of set algebra (Section 4.1). Many of these operations have a strong connection with the subset ordering $\subseteq$, and the laws relating them are listed on a separate page.

Next, the idea of a relation as a set of ordered pairs is introduced, together with various operations on relations (Section 4.2). Again, the subset ordering plays a special part, in that many of the operations are monotonic with respect to it: these laws are shown on their own page.

4.3 Functions

Name

$\mathrel{+\!\!\!\!\to}$ – Partial functions
$\longrightarrow$ – Total functions
$\mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!+}$ – Partial injections
$\rightarrowtail$ – Total injections
$\mathrel{+\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$ – Partial surjections
$\twoheadrightarrow$ – Total surjections
$\mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow}$ – Bijections

Definition

$$X \mathrel{+\!\!\!\!\to} Y == \{ f : X \leftrightarrow Y \mid (\forall x : X;\ y_1, y_2 : Y \bullet (x \mapsto y_1) \in f \land (x \mapsto y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2) \}$$

$$X \longrightarrow Y == \{ f : X \mathrel{+\!\!\!\!\to} Y \mid \operatorname{dom} f = X \}$$

$$X \mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!+} Y == \{ f : X \mathrel{+\!\!\!\!\to} Y \mid (\forall x_1, x_2 : \operatorname{dom} f \bullet f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \}$$

$$X \rightarrowtail Y == (X \mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!+} Y) \cap (X \longrightarrow Y)$$

$$X \mathrel{+\!\!\!\!\twoheadrightarrow} Y == \{ f : X \mathrel{+\!\!\!\!\to} Y \mid \operatorname{ran} f = Y \}$$

$$X \twoheadrightarrow Y == (X \mathrel{+\!\!\!\!\twoheadrightarrow} Y) \cap (X \longrightarrow Y)$$

$$X \mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow} Y == (X \twoheadrightarrow Y) \cap (X \rightarrowtail Y)$$

elders

⊗

§3.6 recursief gedefinieerde functies

recursively defined:
definition refers to itself

1. base values
2. argument closer to a base value

elders

oneindige verzamelingen ?
'meer/evenveel elementen' $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

end...