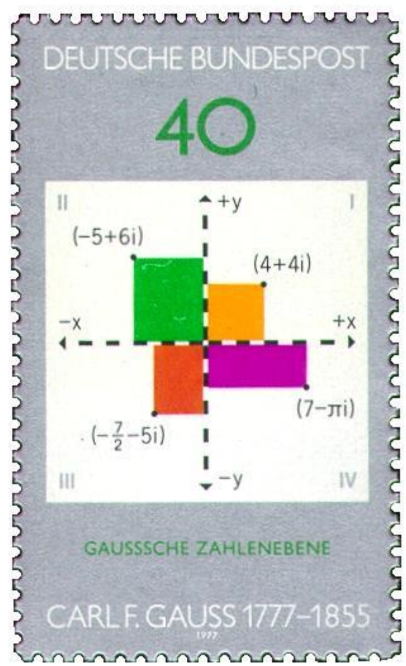
2 Relaties


DEUTSCHE BUNDESPOST
40
II
+y
I
(−5+6i)
(4+4i)
−x
+x
(7−πi)
(−7/2−5i)
III
−y
IV
GAUSSSCHE ZAHLENEBENE
CARL F. GAUSS 1777–1855

Michael Emmerich and André Deutz

that are relevant for in the context of orders.

A *binary relation* $\mathcal{R}$ on some set $\mathcal{S}$ is defined as a subset of $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. We write $\mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathcal{R}$.

Definition 2.1.1 *Properties of binary relations*

$\mathcal{R}$ *is* reflexive $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} : \mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{x}$

$\mathcal{R}$ *is* irreflexive $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} : \neg \mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{x}$

$\mathcal{R}$ *is* symmetric $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{S} : \mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}^2 \mathcal{R} \mathbf{x}^1$

$\mathcal{R}$ *is* antisymmetric $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{S} : \mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{x}^2 \mathcal{R} \mathbf{x}^1 \Rightarrow \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$

$\mathcal{R}$ *is* asymmetric $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{S} : \mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^2 \Rightarrow \neg(\mathbf{x}^2 \mathcal{R} \mathbf{x}^1)$

$\mathcal{R}$ *is* transitive $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3 \in \mathcal{S} : \mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^2 \wedge \mathbf{x}^2 \mathcal{R} \mathbf{x}^3 \Rightarrow \mathbf{x}^1 \mathcal{R} \mathbf{x}^3$

Example It is worthwhile to practise these definitions by finding examples

motivatie

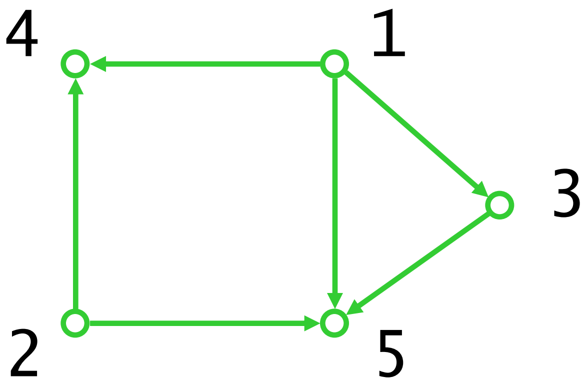
We bestuderen relaties: de terminologie, representaties (de manieren om relaties weer te geven) en naar speciale eigenschappen.

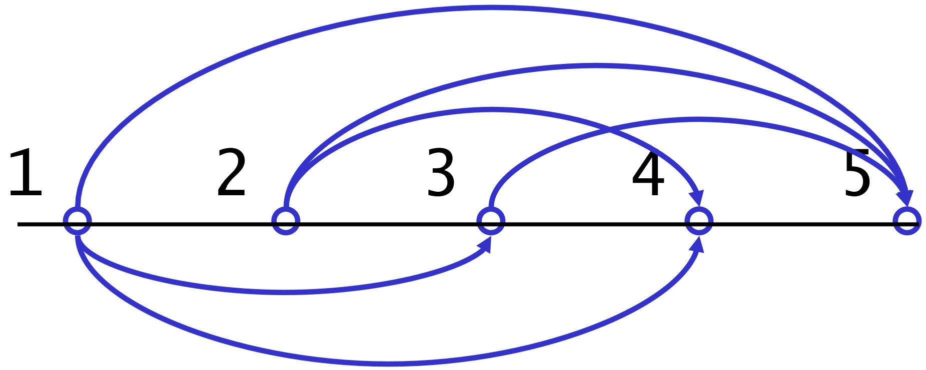
Meest voorkomende toepassing is bij Databases, maar zie ook voorgaand plaatje uit het college Multi-objective[criteria] Optimization.

De volgende slides tonen verschillende vormen van relaties:

- een discrete relatie (met eindige verzamelingen, en verschillende manieren om weer te geven)
- puntverzamelingen in het vlak (meer continu)
- een functie (zie volgend hoofdstuk) waarvan ‘domein’ en ‘bereik’ verschillen
- een database: dit is een ternaire relatie, dus met drie componenten, de voorgaande zijn binair.

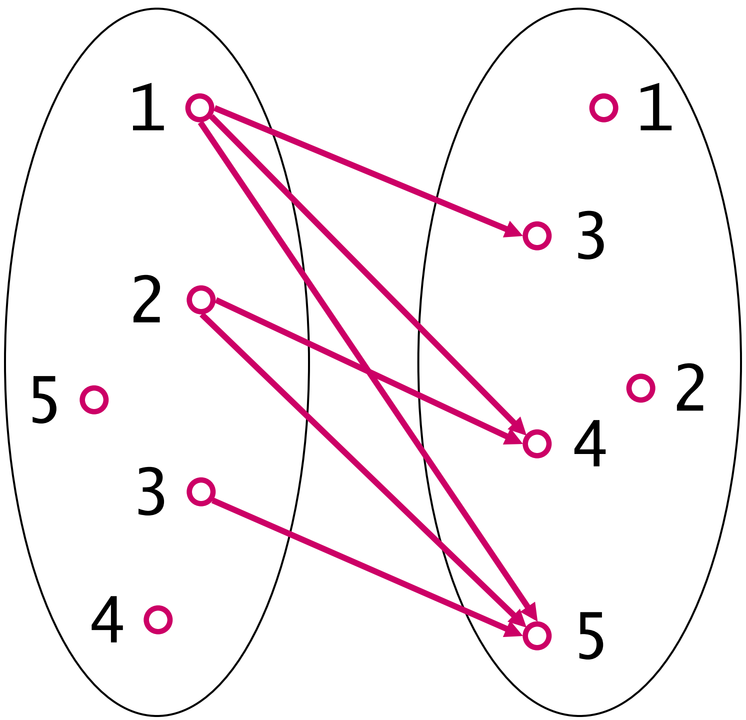
twee of meer erbij





$V = \{\ 1,2,3,4,5\ \}$

$E = \{\ (i,j)\ |\ j \geq i+2\ \}$

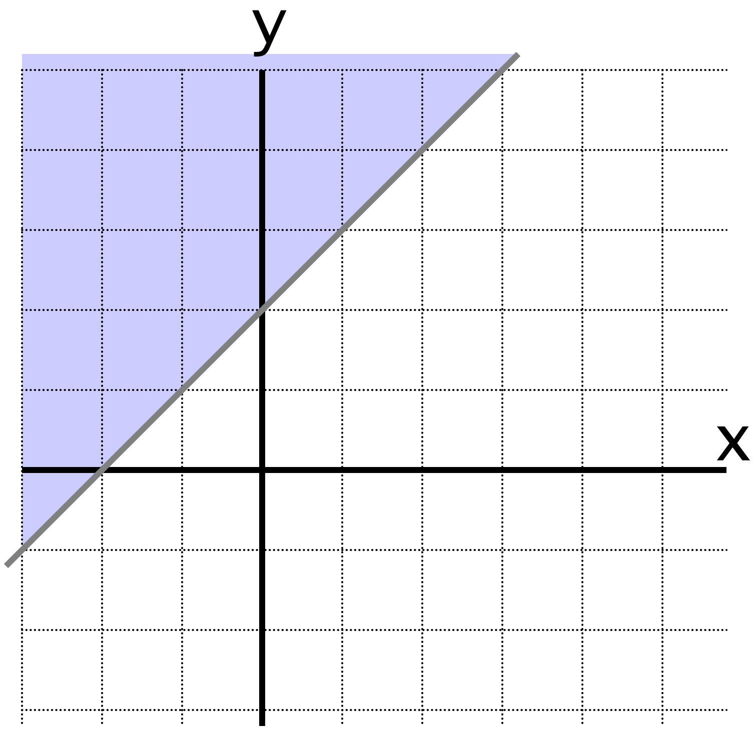


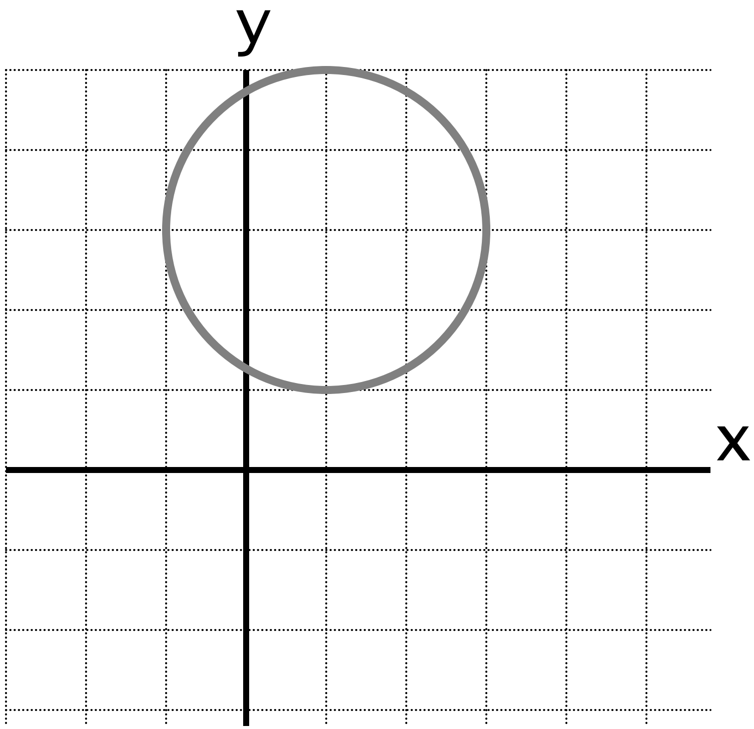
$$\begin{array}{cc} & j \\ & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ i \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

in $\mathbb{R}$:

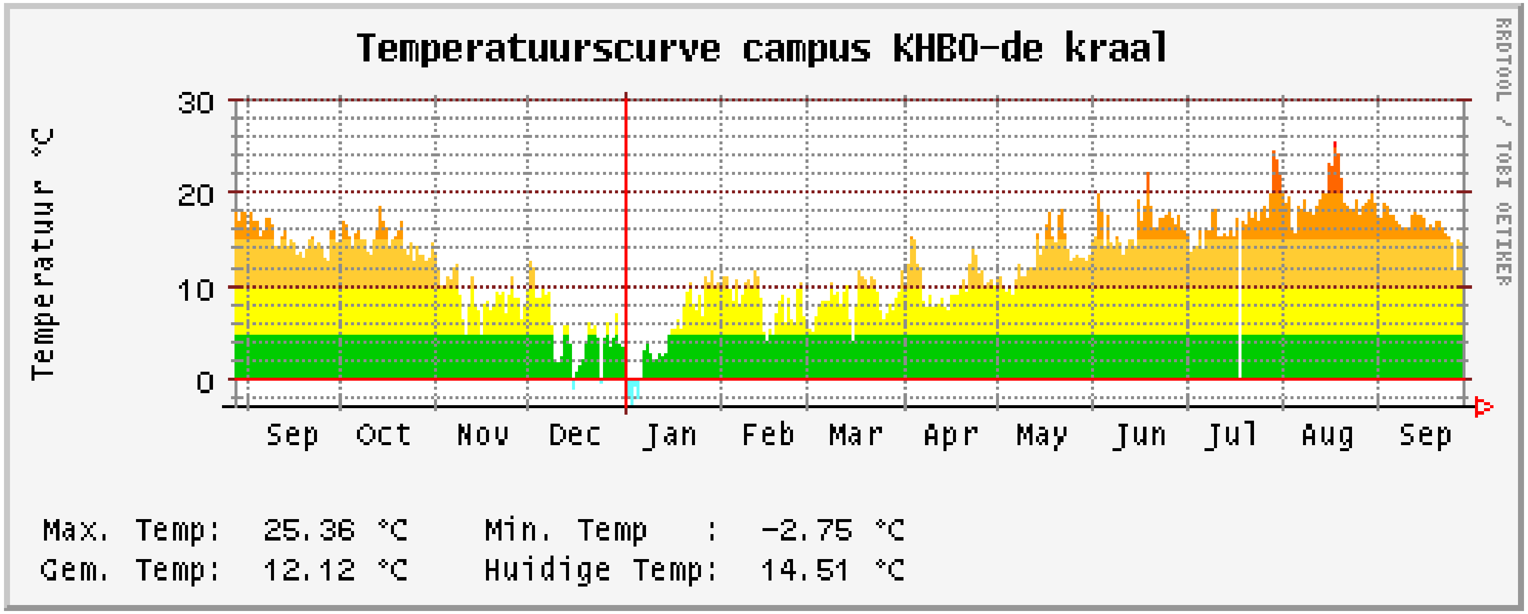
$E = \{ (x,y) \mid y \geq x+2 \}$

$C = \{ (x,y) \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \}$





temperatuur



$$(d, T_d) \quad d \in \{ 28.8.01, \ldots, 30.9.02 \}$$

$$T_d \in \mathbb{R}$$

cijferlijst

V	stnr	cuco	cf
	8303	M250	7
	8303	T350	8
	4722	B140	7
	4722	S570	10
	4722	T480	9
	0347	M250	6
	4948	B140	9
	4948	M250	9
	1576	C250	7
	9594	T250	6
	9352	U161	9
	2592	A470	8
	2592	M350	9
	2592	V400	6

stnr $S = \{ 0000, \ldots, 9999 \}$

cuco $C = \{ A000, \ldots, Z999 \}$

cf $J = \{ 0, 1, \ldots, 9, 10 \}$

$V = \{ (8303, M250, 7),$
$(8303, T350, 8),$
$\ldots$
$(2592, V400, 6) \}$

$V \subseteq S \times C \times J$

§2.2 n-tupels & producten

$(a_1,a_2,...,a_n)$ n-tupel

$a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \dots\ ,\ a_n \in A_n$

volgorde: geordend rijtje

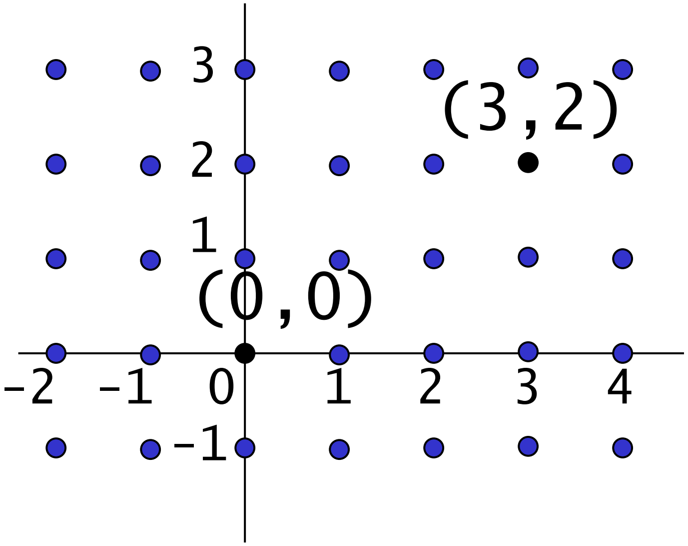
$(a_1,a_2,\ \dots,\ a_n) = (b_1,b_2,\ \dots,\ b_n)$
desdals $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_n = b_n$

Cartesisch product $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

(geordend) paar (a,b)
product $A \times B$

$A^2 = A \times A$ A^n

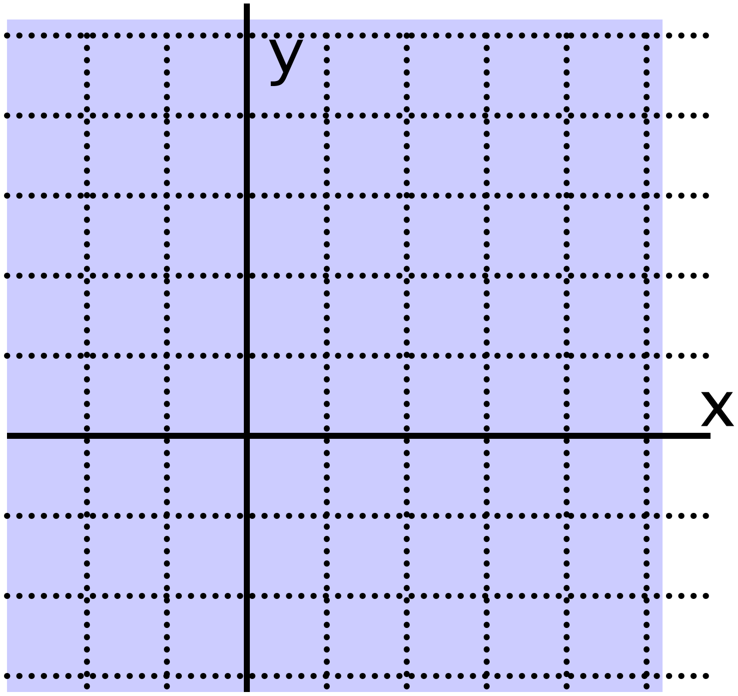
rooster



$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 =$

$\{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z} \}$

vlak



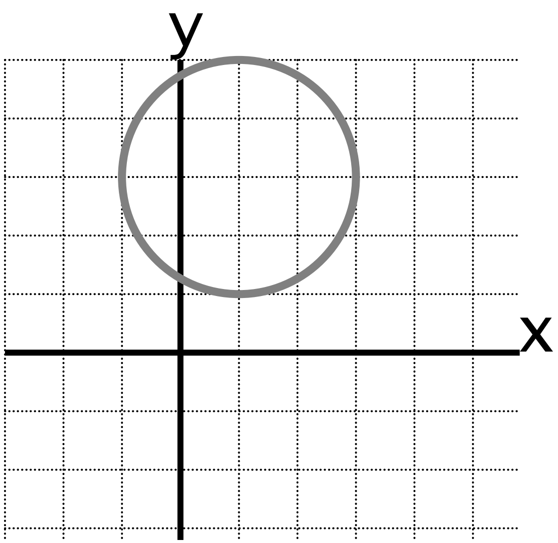
$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$

$\{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^3$ ruimte …

§2.3 relaties

relatie $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$



$$
\begin{aligned}
V = \{ & (8303, \mathrm{M250}, 7), \\
& (8303, \mathrm{T350}, 8), \\
& \ldots \\
& (2592, \mathrm{V400}, 6) \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{ & (0,0,0),\ (0,1,1),\ (0,2,2), \\
& (1,1,2),\ (0,3,3),\ (1,2,3), \\
& (0,4,4),\ (1,3,4),\ (2,2,4), \\
& (0,5,5),\ (1,4,5),\ (2,3,5),\ \ldots\ \}
\end{aligned}
$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \mid x+y=z \}$$

lege relatie

binaire relatie $R \subseteq A \times B$

$aRb \quad (a,b) \in R$

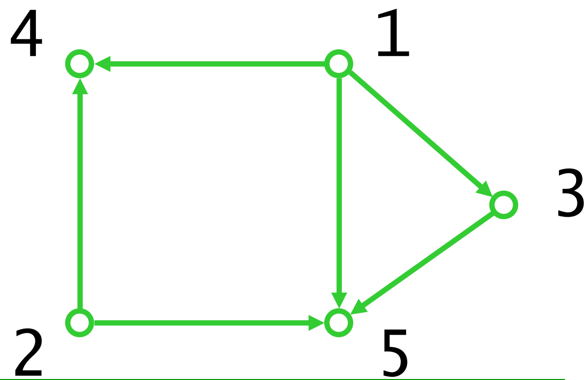
relatie *in* A

(definitie:) Relaties zijn dus deelverzamelingen van een cartesisch product.
Dat product geeft alle mogelijke tupels, de relatie de gekozen deelverzameling daarvan.

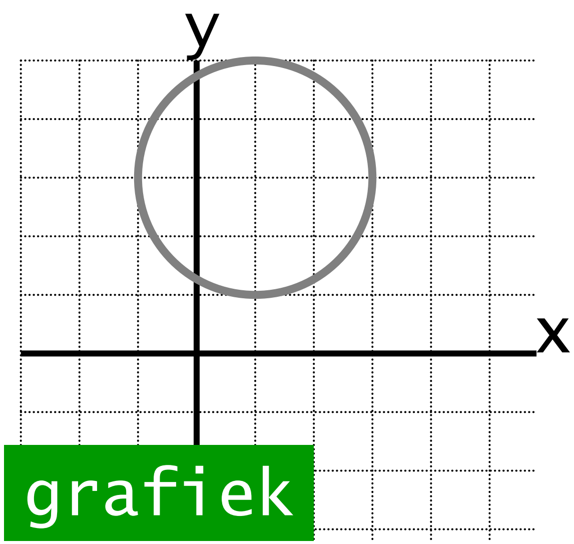
standaard schrijven we binaire relaties als aRb inplaats van $(a,b) \in R$. Bijvoorbeeld $3<7$, en niet $(3,7) \in <$. In dat laatste geval zouden we liever iets als $(3,7) \in R_<$ schrijven.

Voorbeeld: de relatie '$\in$'
bijvoorbeeld $2 \in \{1,2\}$
Links een element, rechts een verzameling.
Bij universum U is de relatie $\in$ een deelverzameling van $U \times \mathcal{P}(U)$.

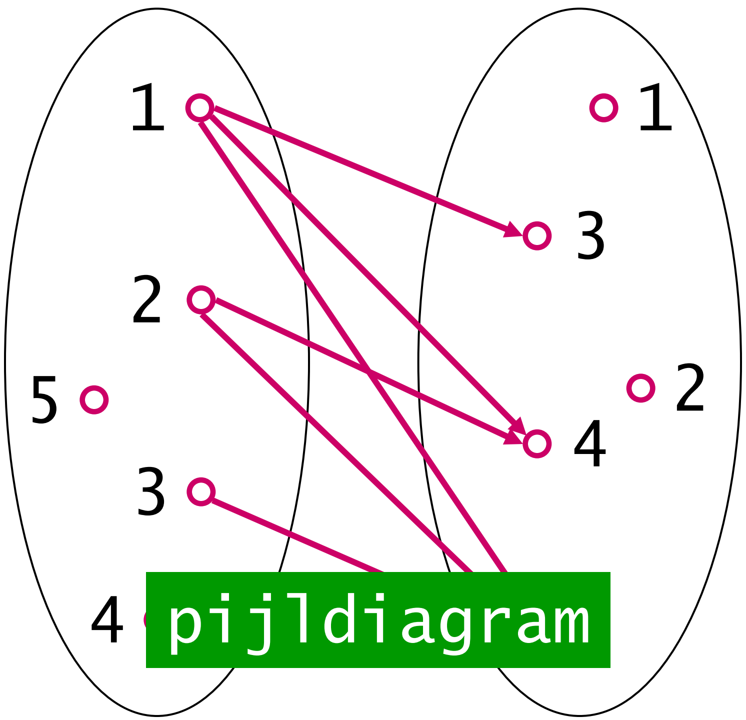
§2.4 representaties



gerichte graaf



grafiek



pijldiagram

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrix

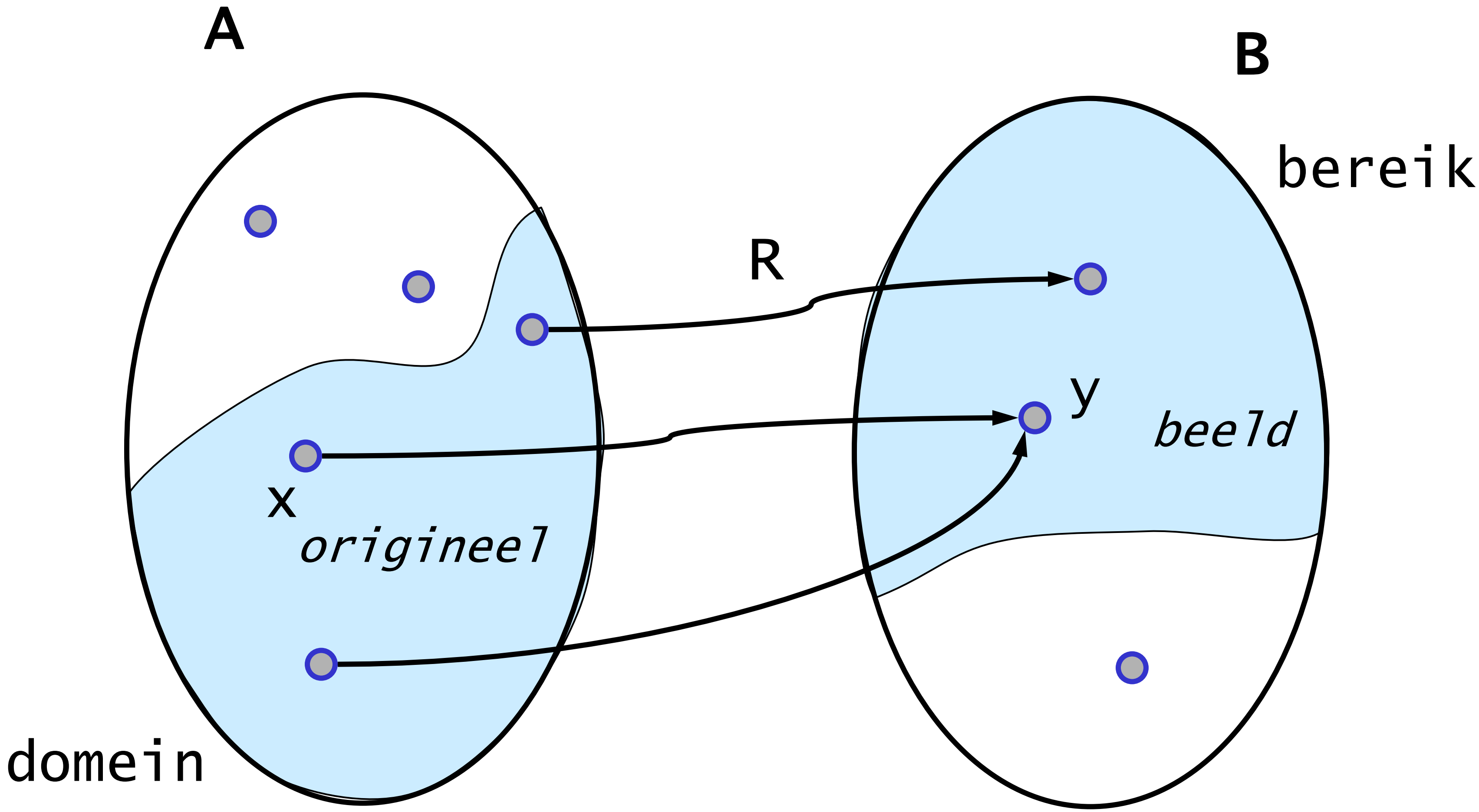
veelgebruikte representaties:

pijldiagram en matrix voor een relatie $R \subseteq A \times B$ (als A en B eindig zijn).

gerichte graaf voor een relatie $R \subseteq A \times A$ dwz ‘van’ en ‘naar’ zijn gelijk.

grafiek alleen voor geschikte verzamelingen en redelijk ‘continue’ plaatjes.

domein & bereik



$R \subseteq A \times B$

begrippen domein en bereik worden soms op verschillende twee manieren gebruikt (en de docent doet daar vrolijk aan mee, helaas)

voor de relatie $R \subseteq A \times B$
is *formeel* het domein de verzameling

$\mathrm{dom}(R) = \{\ x \in A \mid \text{er is een } y \in B \text{ met } xRy\ \}$

dwz. de punten “waar pijlen vertrekken”

slordiger noemen we soms A het domein

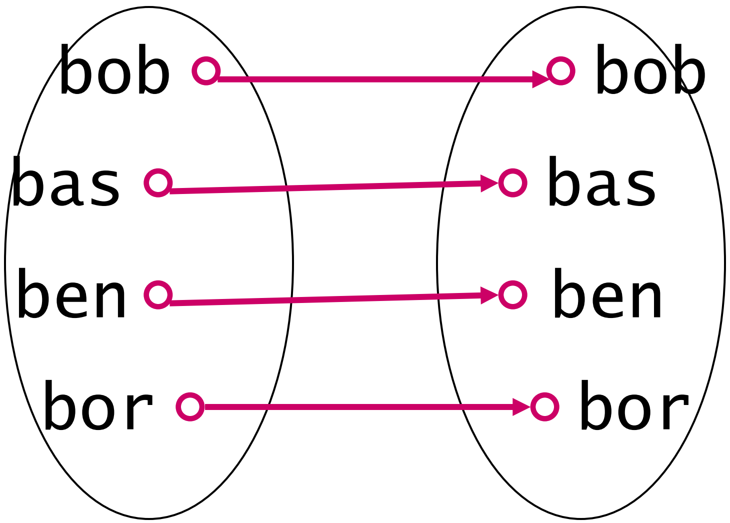
idem voor bereik (*range*)

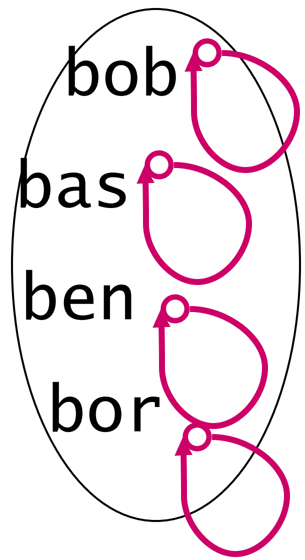
$\mathrm{ran}(R) = \{\ y \in B \mid \text{er is een } x \in A \text{ met } xRy\ \}$

als xRy heten x en y vaak origineel en beeld, net als bij functies

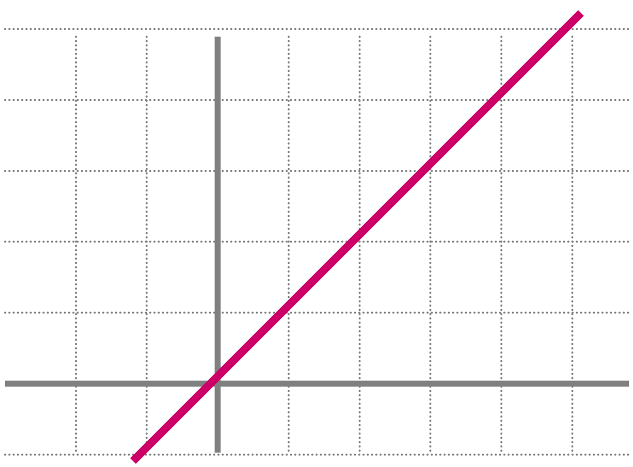
$R = \{ (x,x) \mid x \in A \}$

gelijkheid, identiteit, diagonaal id_A 1_A Δ_A





$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



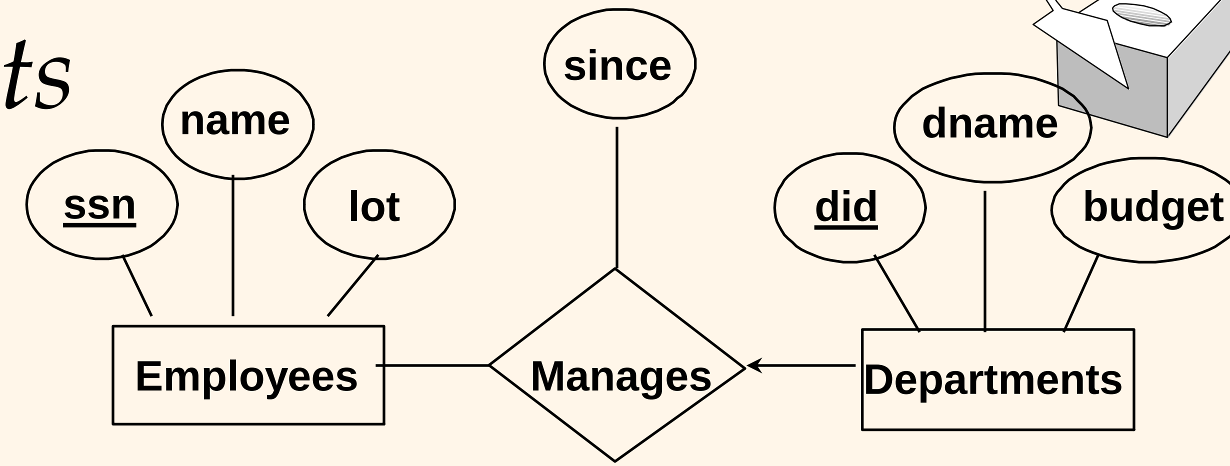
0,1,2,3,4,5,6, …

identiteit

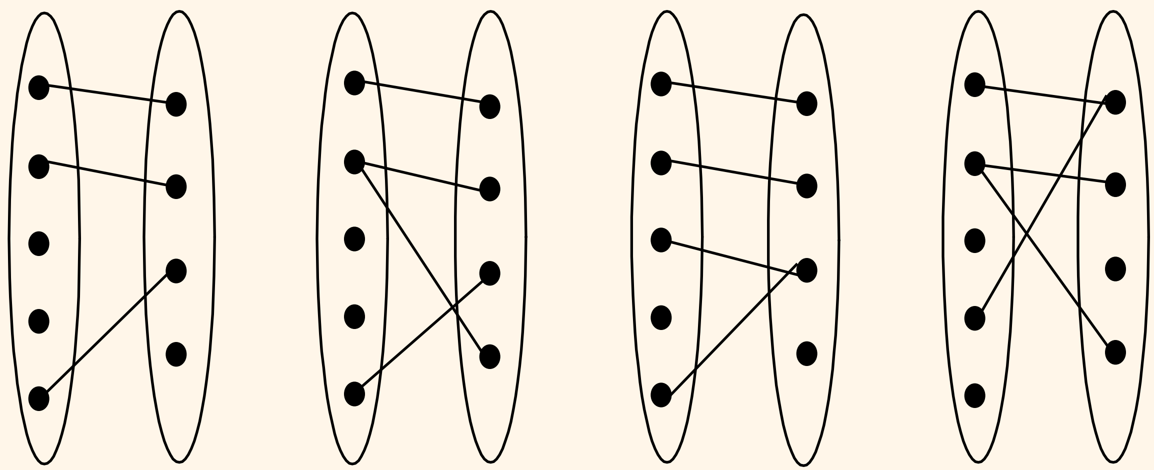
op elk domein bestaat de identiteit (ook geheten diagonaal of gelijkheid)

de naam diagonaal wordt duidelijk als we de relatie tekenen in het getallenvlak (reëel of geheel) of als matrix (op een eindig domein)

Key Constraints



- Consider Works_In: An employee can work in many departments; a dept can have many employees.
- In contrast, each dept has at most one manager, according to the *key constraint* on Manages.



1-to-1 | 1-to Many | Many-to-1 | Many-to-Many

relatie-typen

$R \subseteq A \times B$

Definitie.

R heet functioneel als voor elke $x \in A$ er ten hoogste één $y \in B$ is met xRy

R heet totaal als voor elke $x \in A$ er ten minste één $y \in B$ is met xRy

R heet injectief als voor elke $y \in B$ er ten hoogste één $x \in A$ is met xRy

R heet surjectief als voor elke $y \in B$ er ten minste één $x \in A$ is met xRy

functioneel

$R \subseteq A \times B$

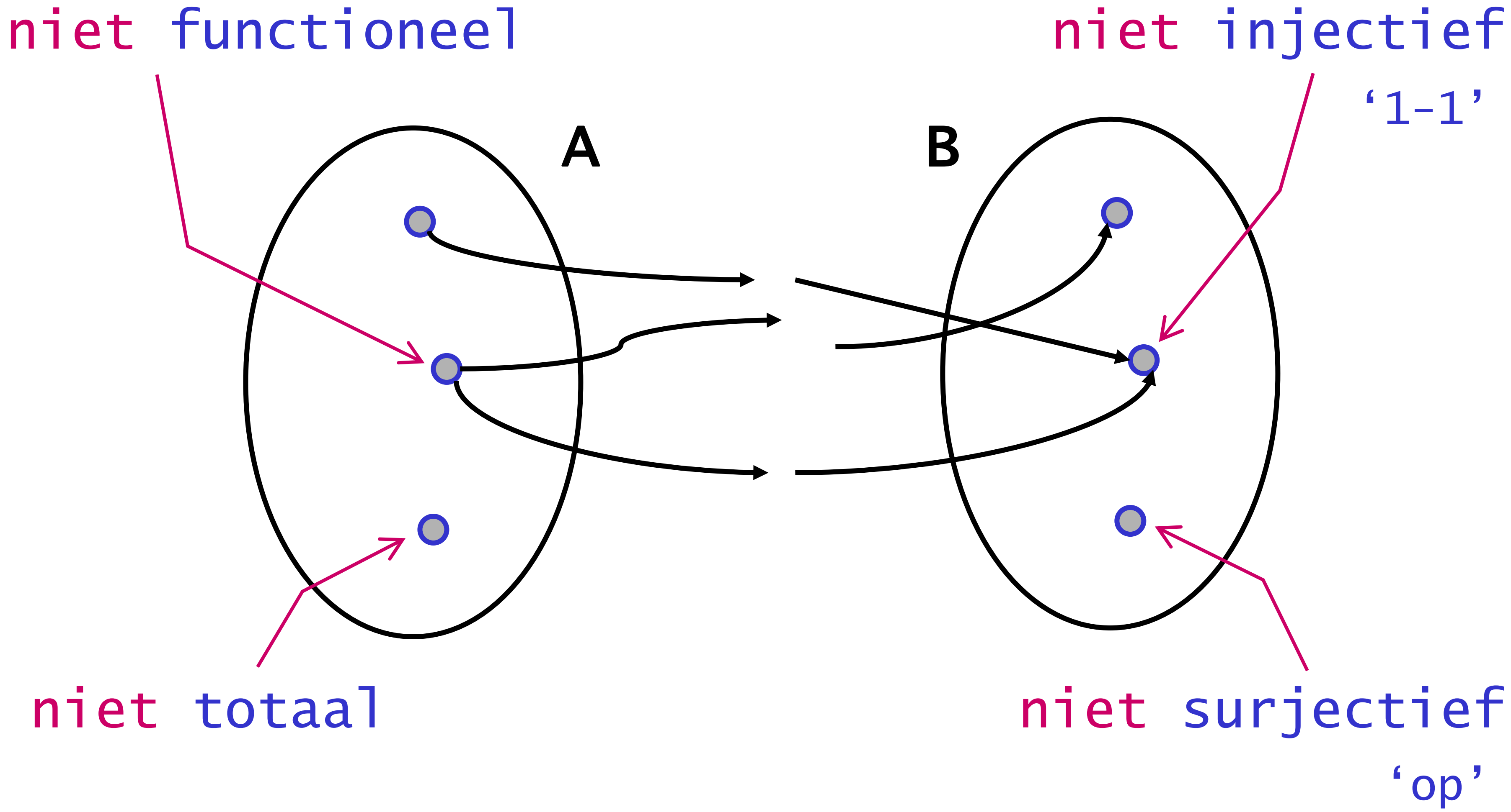
Definitie. R heet functioneel als voor elke $x \in A$ er ten hoogste één $y \in B$ is met xRy

Wiskundigen gebruiken vaak een andere methode om ‘ten hoogste’ uit te drukken, eigenlijk zonder te hoeven tellen:

R is functioneel als uit xRy en xRz volgt dat y=z.

Een zelfde soort methode wordt hierna ook gebruikt voor de definitie van anti-symmetrisch.

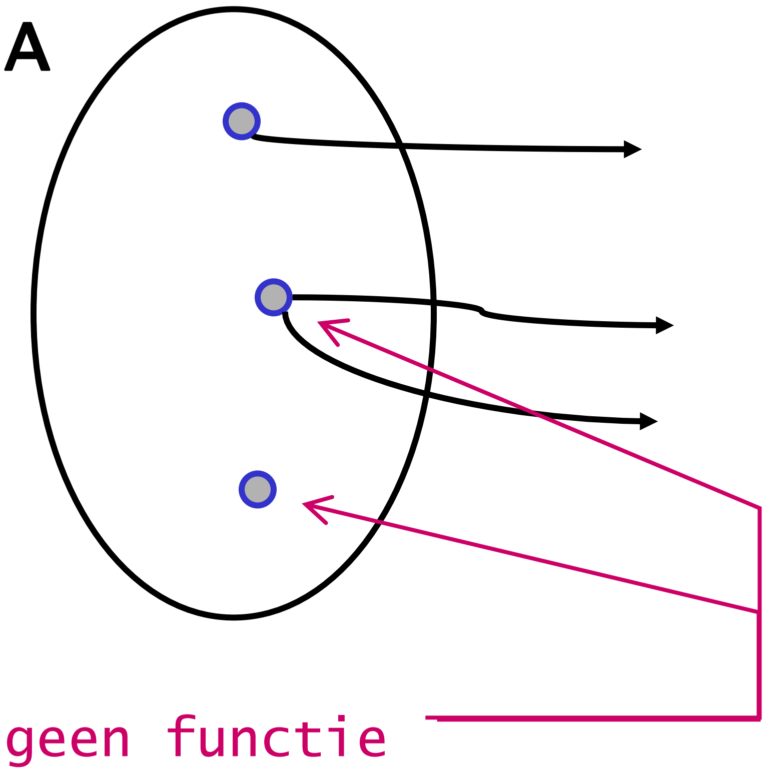
relatie-typen

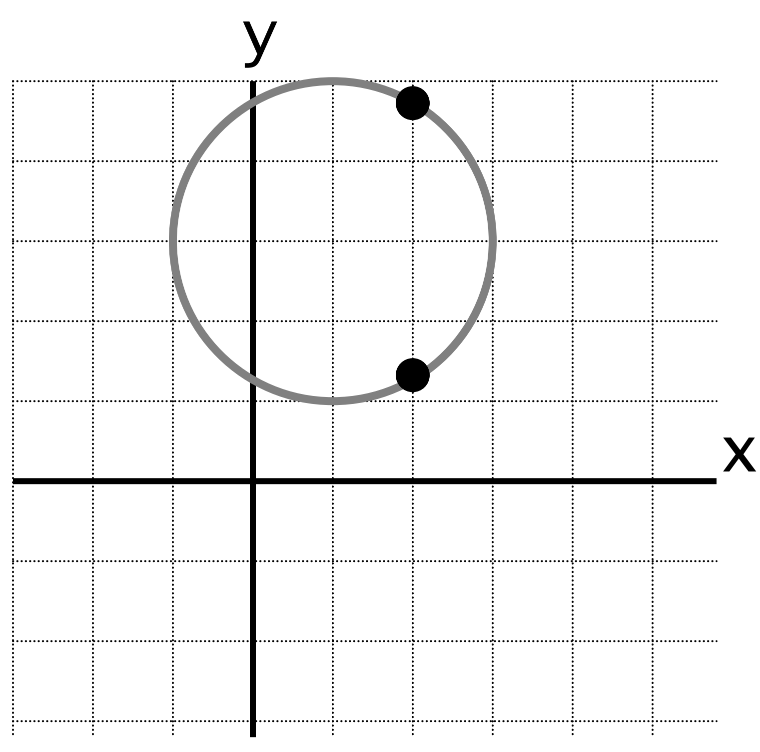


functie van A naar B als voor iedere $x \in A$
er precies één $y \in B$ bestaat waarvoor xRy.

totaal & functioneel

$f: A \to B \quad y = f(x)$



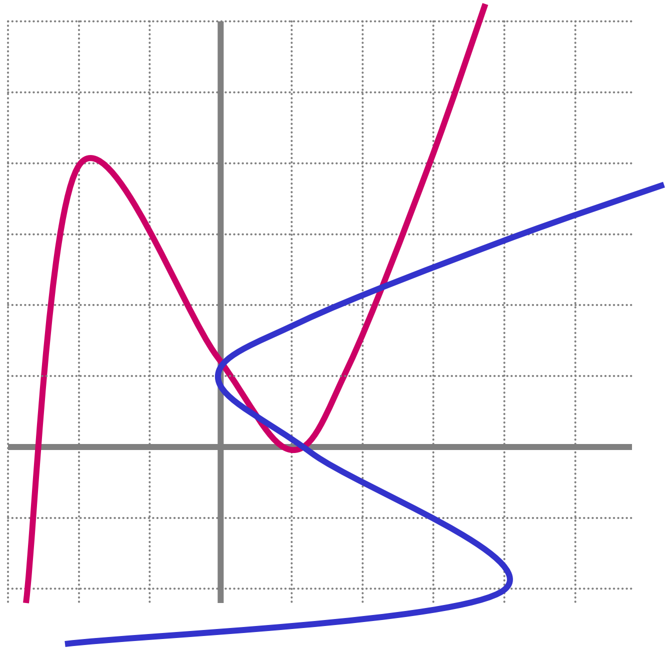


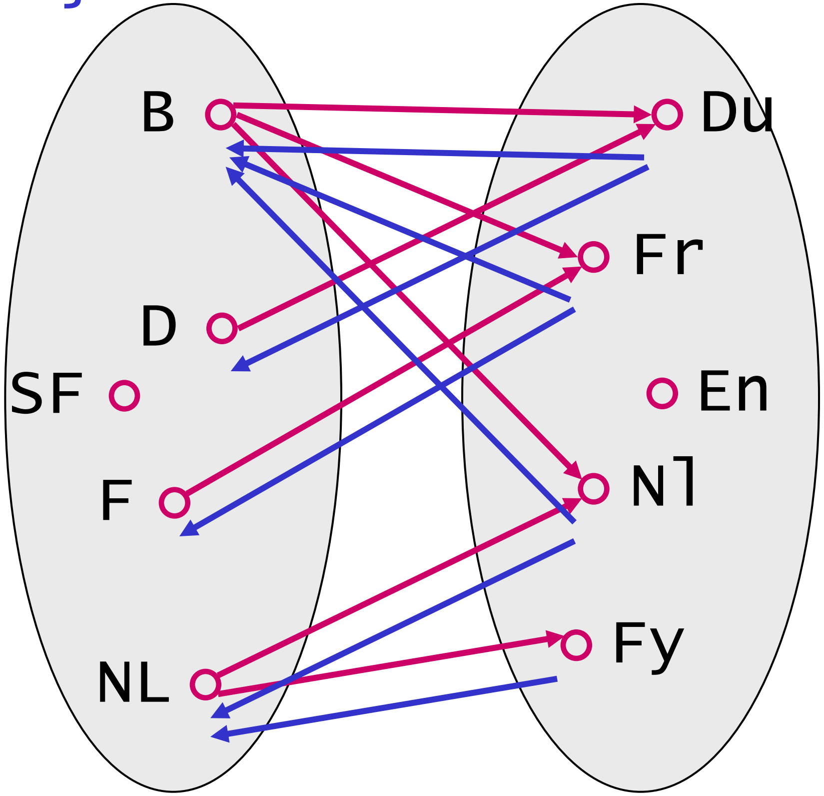
$R \subseteq A \times B$

$R^{-1} \subseteq B \times A$ *inverse relatie*

$bR^{-1}a$ desdals aRb.

$$R^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$$





inverse

De inverse is intuitief:

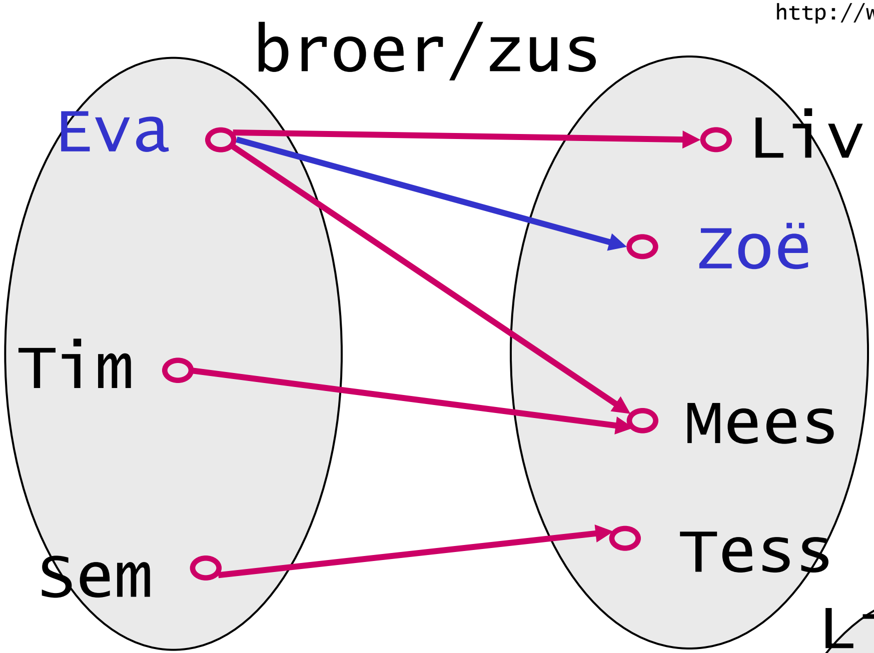
- in een grafiek het spiegelen in de diagonaal x=y
- in een pijldiagram of een graaf het omklappen van de pijlen

Er geldt:
R is injectief desdals R^{-1} is functioneel
R is totaal desdals R^{-1} is surjectief

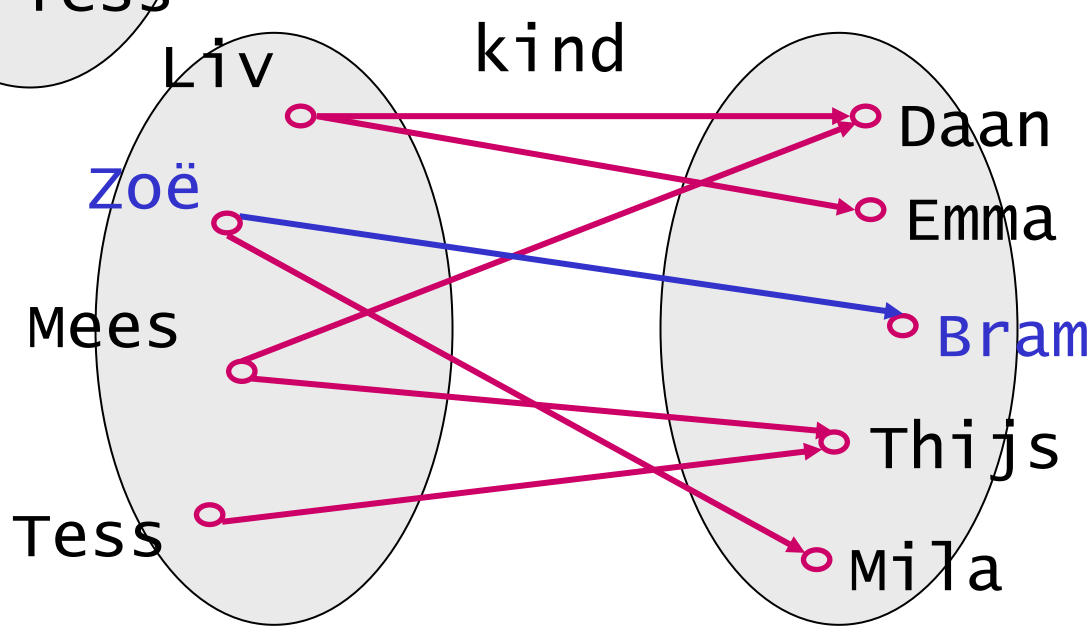
De relatie in het voorbeeld is die tussen land en ‘officiele’ taal.
Natuurlijk wordt er wel een taal in Finland SF gesproken (in ieder geval Fins en Zweeds) maar vertrekken er geen pijlen omdat die talen niet rechts voorkomen.
Op dezelfde manier heeft Engels ‘en’ geen inkomende pijlen.

§2.5 samenstelling

http://www.svb.nl/int/nl/kindernamen/artikelen/top20/archief/2014/index.jsp



Bram is een neefje van Eva
'oomzegger'



samenstellen relaties

alternatief voorbeeld: databases

persoon → straat, nr, postcode
postcode → plaatsnaam

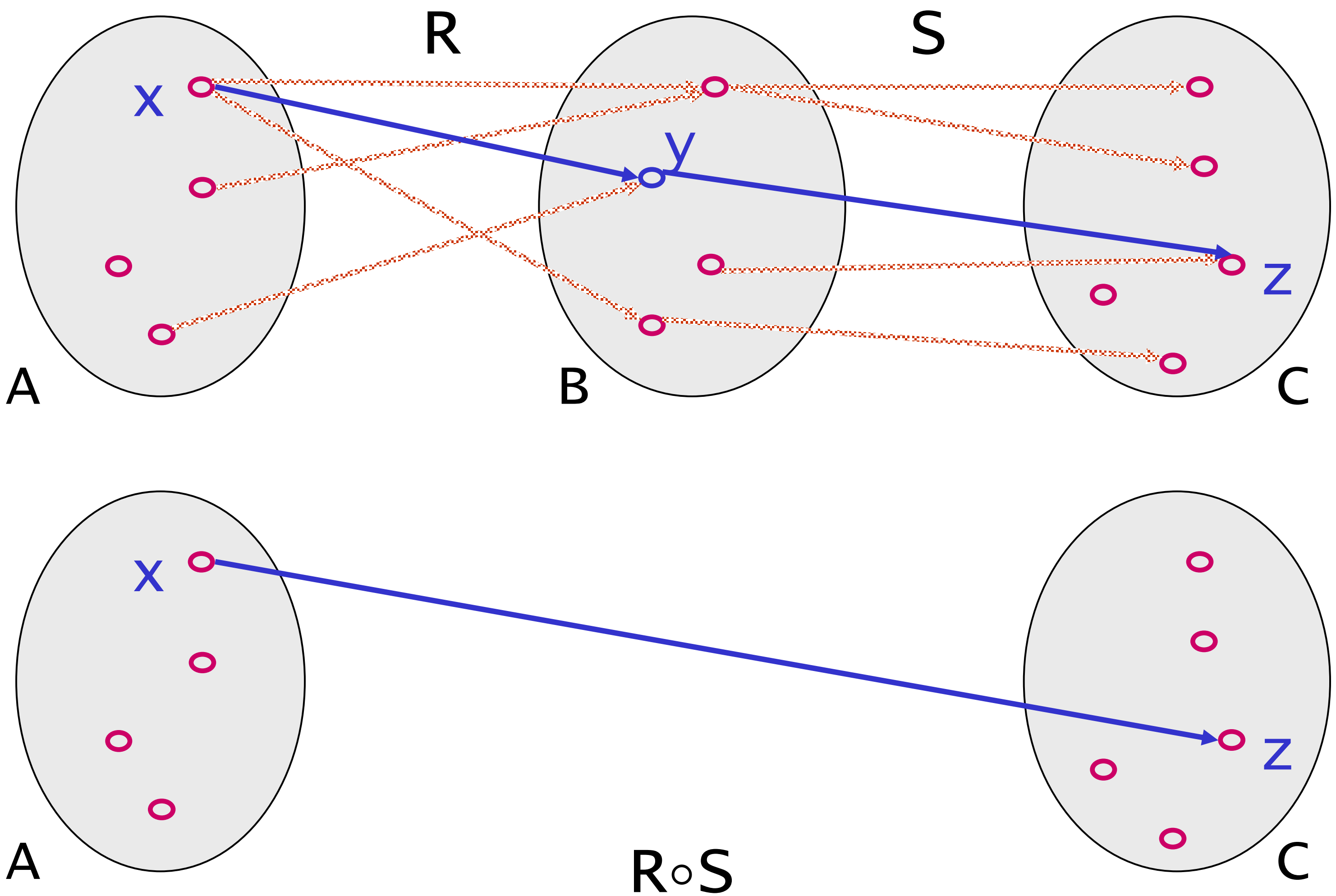
om het adres te weten moeten we de plaatsnaam bepalen door twee relaties samen te stellen persoon → postcode → plaatsnaam

in dit voorbeeld zijn de relaties zijn helaas functioneel (dus niet zo algemeen als we hier willen)

samenstelling

$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$

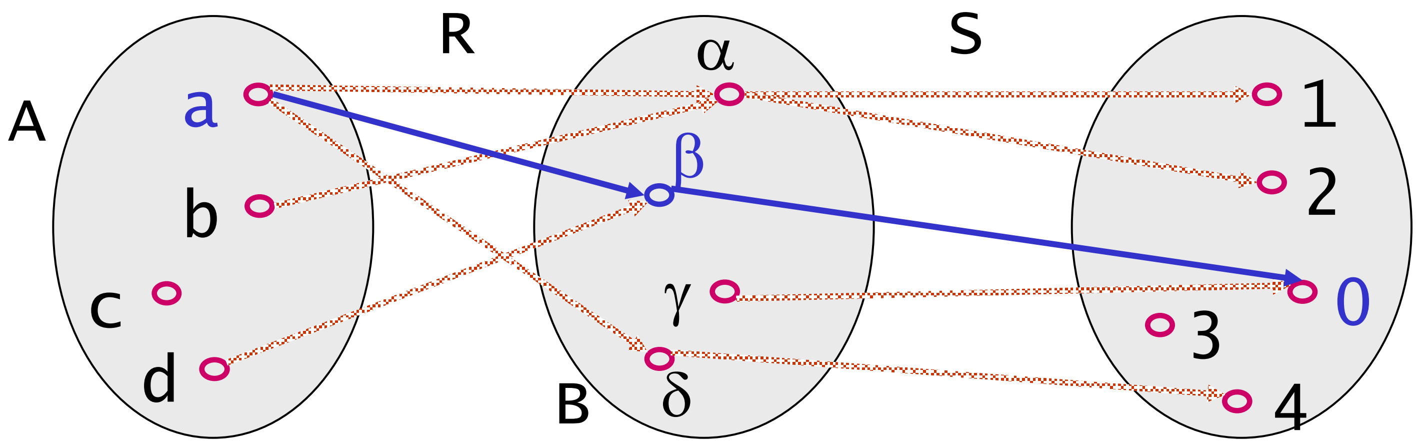
$x(R \circ S)z$ desdals xRy en ySz voor een $y \in B$



samenstelling

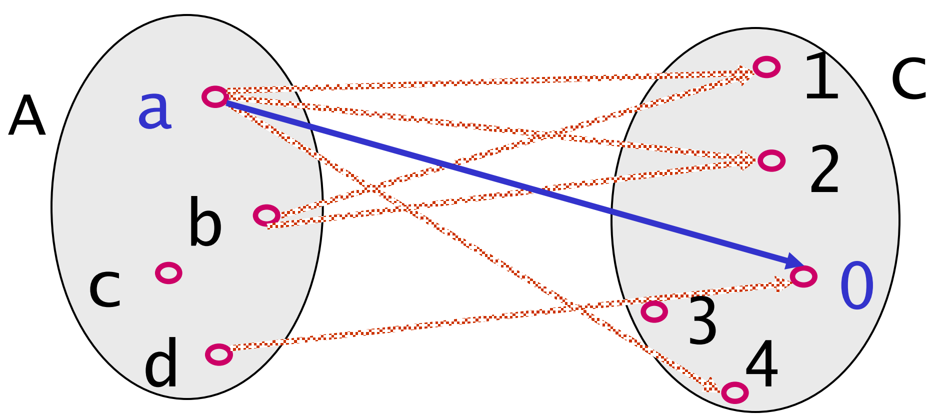
$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$

$x(R \circ S)z$ desdals xRy en ySz voor een $y \in B$



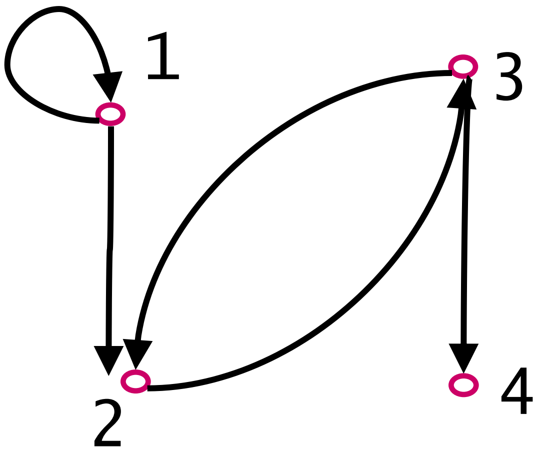
$R = \{ (a,\alpha), (a,\beta), (a,\delta), (b,\alpha), (d,\beta) \}$

$S = \{ (\alpha,1), (\alpha,2), (\beta,0), (\gamma,0), (\delta,4) \}$



$R \circ S =$
$\{ (a,0), (a,1), (a,2), (a,4), (b,1), (b,2), (d,0) \}$

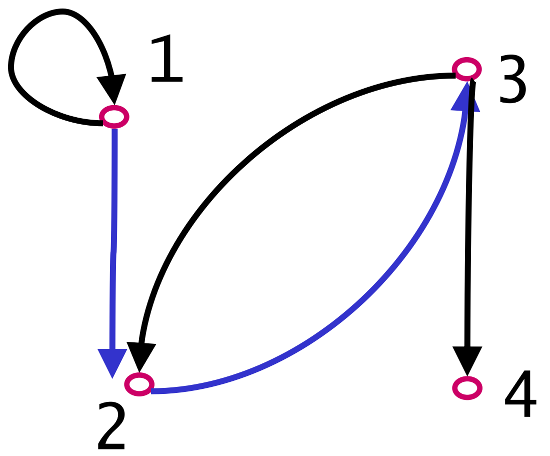
voorbeeld

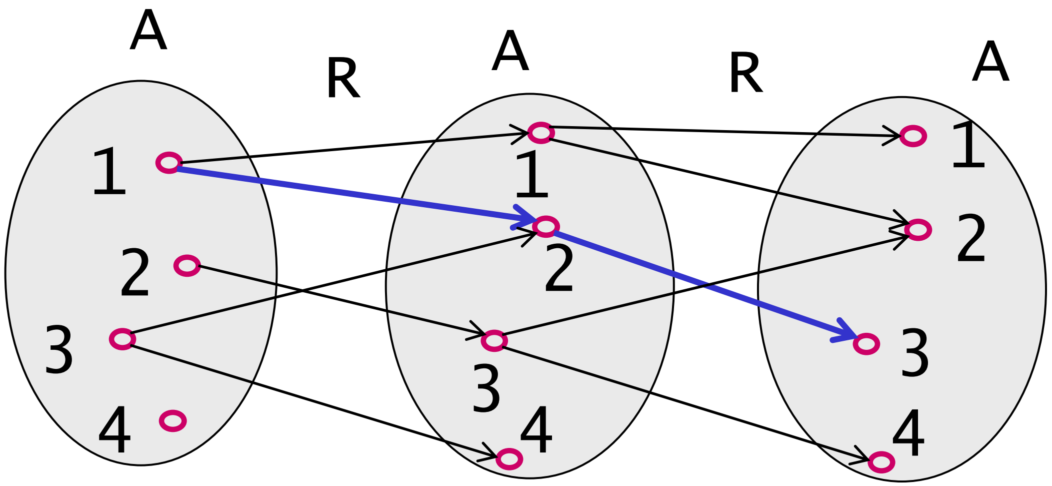


$R \circ R = R^2 =$
$\{ (1,1),(1,2),(1,3),$
$(2,2),(2,4),(3,3) \}$

$R^{-1} \circ R =$
$\{ (1,1),(1,2),(2,1),$
$(2,2),(2,4),(3,3),$
$(4,2),(4,4) \}$

is symmetrisch (altijd)

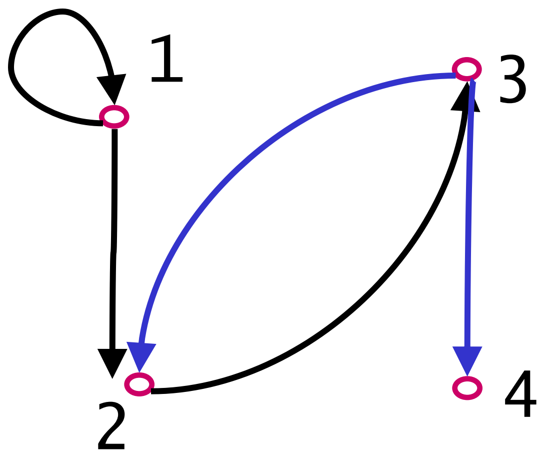


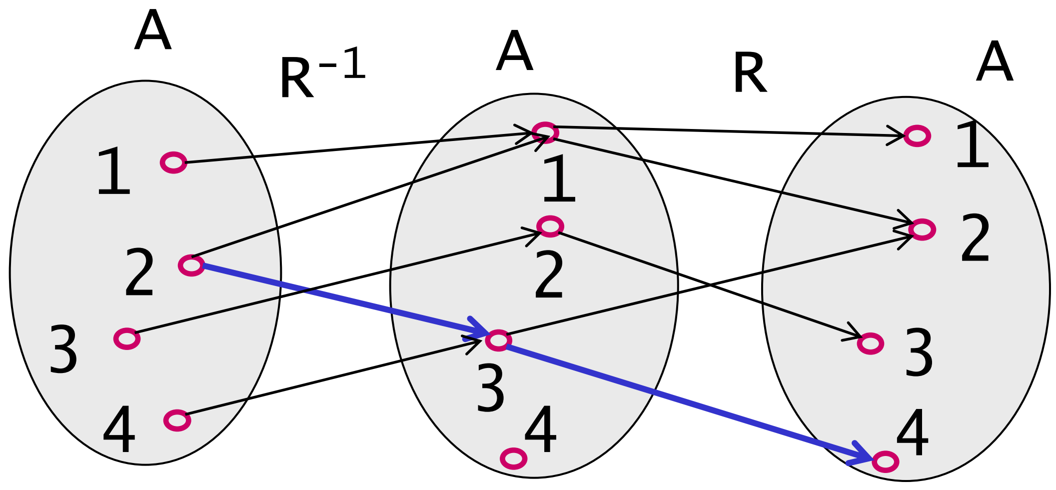


$R \circ R = R^2 =$
$\{ (1,1),(1,2),(1,3),$
$(2,2),(2,4),(3,3) \}$

‘twee-staps relatie’
(in graaf, resp. in pijldiagram)

voorbeeld





$R^{-1} \circ R =$
{ (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),
(2,4),(3,3),(4,2),(4,4) }

'achterruit vooruit'
(in graaf, resp. in pijldiagram)

matrixvermenigvuldiging

$R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq B \times C$, $x \in A$, $z \in C$

$x(S \circ R)z$ als er een $y \in B$ is waarvoor xRy en ySz

	Da	Em	Br	Th	Mi
Li	x	x			
Zo			x		x
Me	x			x	
Te				x	

	Li	Zo	Me	Te
Ev	x	x	x	
Ti			x	
Se				x

	Da	Em	Br	Th	Mi
Ev	x	x	x	x	x
Ti	x			x	
Se				x	

matrixvermenigvuldiging

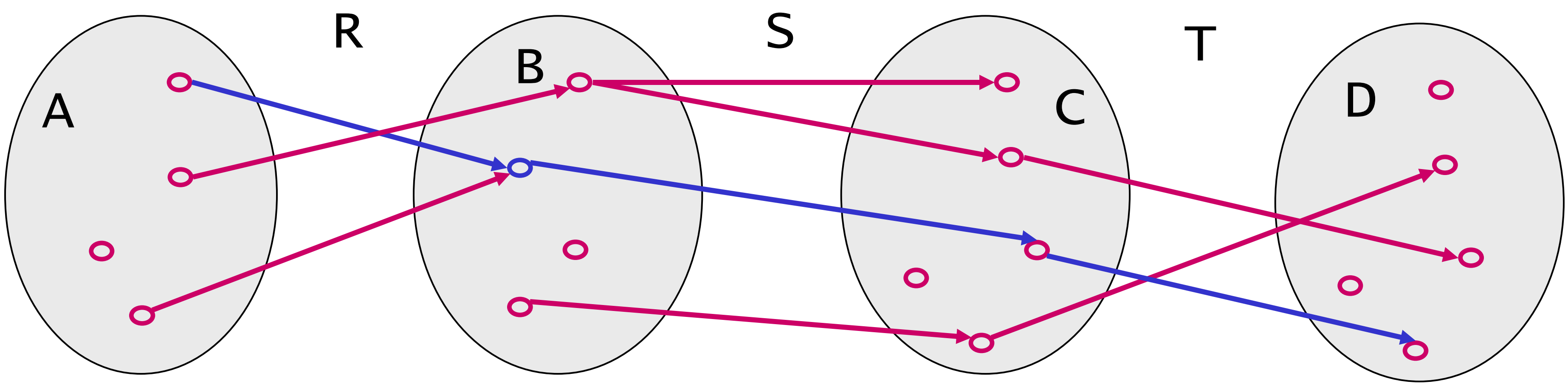
er is een verband tussen samenstelling van relaties en matrixvermenigvuldiging [mocht je dat al ergens geleerd hebben].

matrixen vermenigvuldig je in de rekenkunde met behulp van optellen en vermenigvuldigen; bij samenstellen van relaties gebruik je booleans (0 true, 1 false) en disjunctie ($\vee$ óf) en conjunctie ($\wedge$ én)

associativiteit

Theorem 2.1

samenstellen van relaties is associatief:
als $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ en $T \subseteq C \times D$,
dan $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.



volgorde !? $x \; R \circ S \; y$ $y = g \circ f \, (x)$

Notatie: ‘richting’ van origineel x naar beeld y

Bij relaties schrijven we xRy wanneer er een pijl van x naar y vertrekt. Bij functies $y=f(x)$.

Bij relaties $x(R \circ S)y$, eerst R dan S, bij functies $y=(g \circ f)x$, eerst f dan g toepassen.

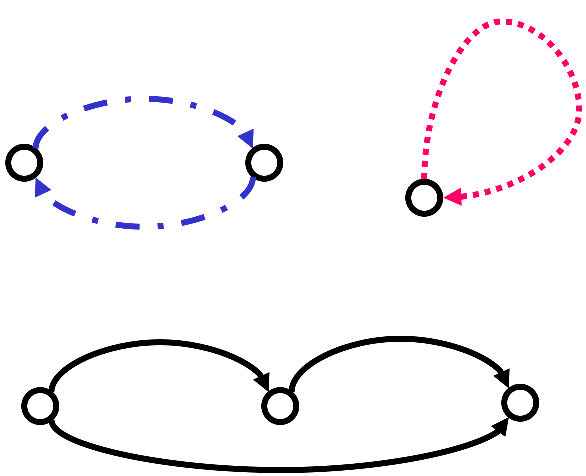
Dat is verwarrend als we ons realiseren dat elke functie ook een relatie is.

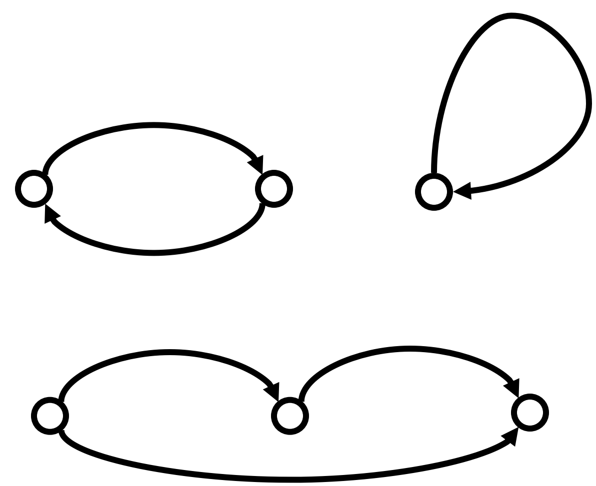
volgorde !? $\quad x \; \overrightarrow{R \circ S} \; y \qquad y = \overleftarrow{g \circ f} \; (x)$

§2.6 eigenschappen (van binaire relaties)

kleiner (-gelijk)

gelijke kleur



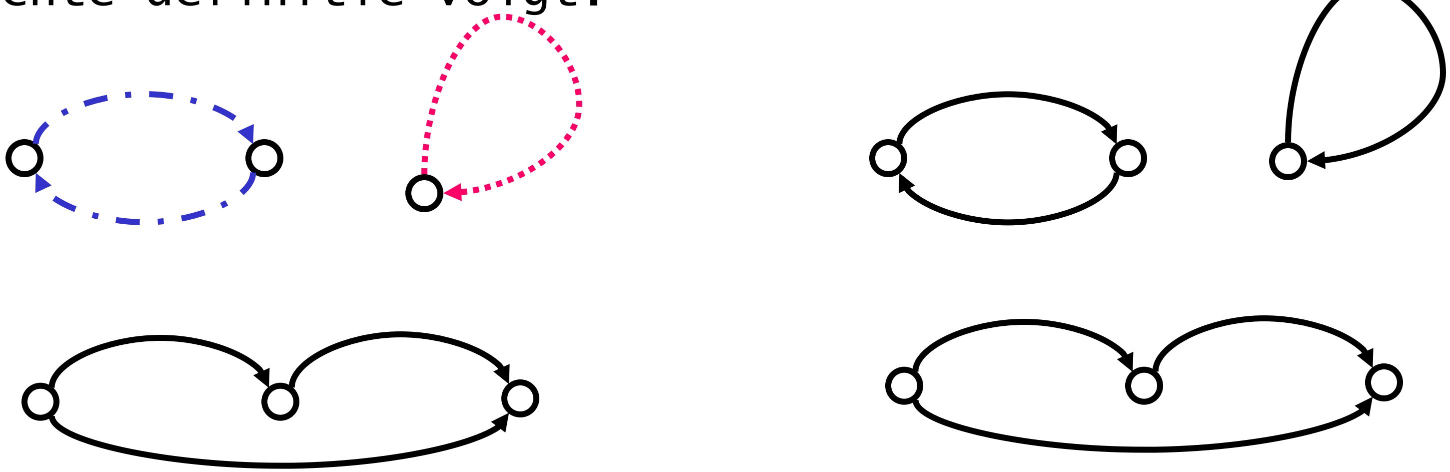


§2.6 eigenschappen (van binaire relaties)

er zijn twee typen relaties (equivalentierelatie, partiële ordening zie volgende paragrafen van Schaum) die vaak voorkomen. ze zijn gedefinieerd op binaire relaties 'op' een verzameling (en niet 'tussen' twee verschillende).

de karakteristieken liggen vast met behulp van de relatie tussen één, twee en drie objecten: (ir)reflexiviteit, (anti)symmetrie, en transitiviteit.

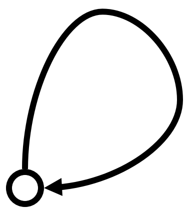
de plaatjes hieronder zijn slechts intuitief!
de echte definitie volgt.



partiële ordening equivalentierelatie,

reflexief

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet
- *reflexief* als xRx voor alle $x \in V$
- *irreflexief* als xRx voor geen $x \in V$

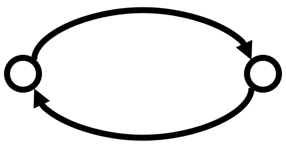


$\mathbb{Z}$	$x \leq y$	R
$\mathbb{Z}$	$x < y$	IR
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \varnothing$	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR
V	$x = y$	R
$\mathbb{Z}^+$	$2x \geq y$	R
'gelijke kleur'		R

symmetrisch

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

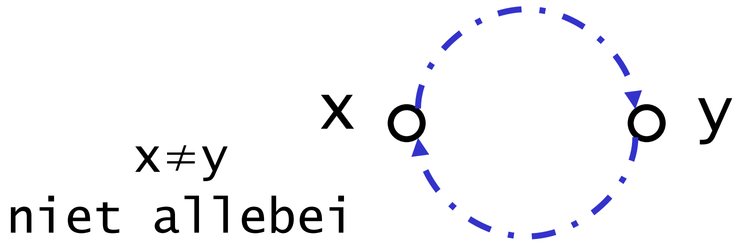
- *symmetrisch* als xRy impliceert dat yRx
  (voor alle $x,y \in V$)
- *anti-symmetrisch* als xRy en yRx impliceren dat x=y
  (voor alle $x,y \in V$)

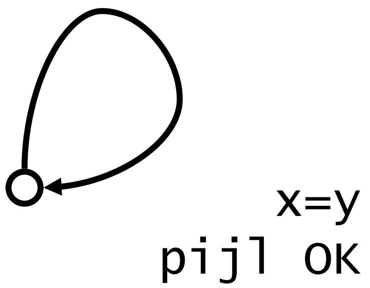


$\mathbb{Z}$	$x \leq y$	AS	
$\mathbb{Z}$	$x < y$	AS	(!)
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \varnothing$	S	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	AS	
V	$x = y$	S AS	
$\mathbb{Z}^+$	$2x \geq y$		
‘gelijke kleur’		S	

symmetrisch

symmetrisch: wanneer tussen twee punten de pijl in de ene richting loopt dan ook omgekeerd
antisymmetrisch: tussen twee punten loopt nooit een pijl in twee richtingen, *tenzij* die punten samenvallen (en het dus over dezelfde pijl gaat)





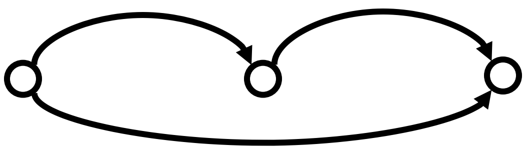
“ als xRy en yRx gelden, dan x=y ”

let op: zowel ≤ als < is een antisymmetrische relatie, idem ⊆ en ⊂.

transitief

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *transitief* als xRy en yRz impliceren dat xRz
  (voor alle $x,y,z \in V$)



$\mathbb{Z}$	$x \le y$	T
$\mathbb{Z}$	$x < y$	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$	
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	T
V	$x = y$	T
$\mathbb{Z}^+$	$2x \ge y$	
‘gelijke kleur’		T

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

R reflexief $\Leftrightarrow$ $id \subseteq R$

R symmetrisch $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \subseteq R$

R transitief $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$
$\Leftrightarrow$ $R^n \subseteq R$ voor alle $n \in \mathbb{N}^+$

Theorem 2.2

binaire relatie $R \subseteq A \times B$

R functioneel $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \circ R \subseteq id_B$

R surjectief $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \circ R \supseteq id_B$

twee manieren om hetzelfde uit te drukken

R reflexief $\Leftrightarrow$ id $\subseteq$ R

id is de relatie { (x,x) | x in A }
reflexief als (x,x) in R voor alle x in A
oftewel als id geheel in R zit

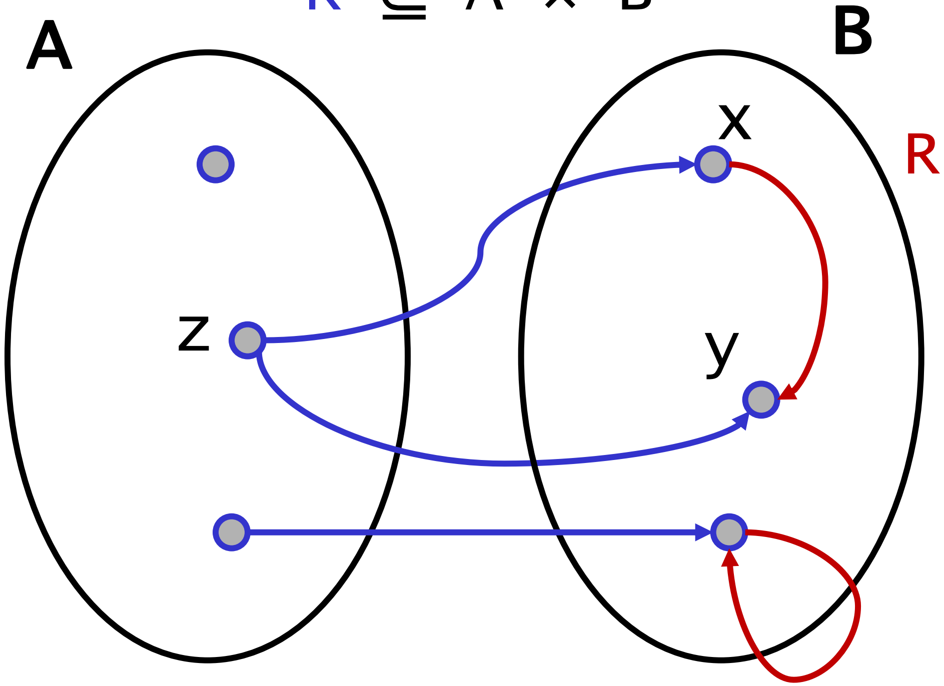
R symmetrisch $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \subseteq R$

R^{-1} is de relatie { (y,x) | (x,y) in R }
symmetrisch: als (x,y) in R dan ook (y,x) in R
oftewel als R^{-1} geheel in R zit

R transitief $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$

R^2 is de relatie
{ (x,z) | (x,y) en (y,z) in R }
transitief: als (x,y) en (y,z) in R dan ook (x,z) in R,
dat zijn precies de paren die in R^2 zitten

$R \subseteq A \times B$



$R^{-1} \circ R \subseteq B \times B$

$(z,x) \in R \ \&\ (z,y) \in R$

$\Leftrightarrow$

$(x,z) \in R^{-1} \ \&\ (z,y) \in R$

$\Leftrightarrow$

$(x,y) \in R^{-1} \circ R$

kies x=y

$(z,x) \in R \Leftrightarrow (x,x) \in R^{-1} \circ R$

R functioneel $\Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq id_B$

R surjectief $\Leftrightarrow R^{-1} \circ R \supseteq id_B$

R functioneel $\Leftrightarrow$ $R^{-1} \circ R \subseteq id_B$

$(x,y) \in R^{-1} \circ R$ desdals
$(z,x) \in R$ & $(z,y) \in R$ voor een $z \in A$

R is functioneel
desdals zRx en zRy impliceert x=y
maw
desdals $(x,y) \in R^{-1} \circ R$ impliceert dat x=y
maw
desals $R^{-1} \circ R \subseteq id_B$

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

R irreflexief $\Leftrightarrow$ $id \cap R = \varnothing$

R antisymmetrisch $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq id$

R transitief $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

$\Leftrightarrow R^n \subseteq R$ voor alle $n \in \mathbb{N}^+$

binaire relatie $R \subseteq A \times B$

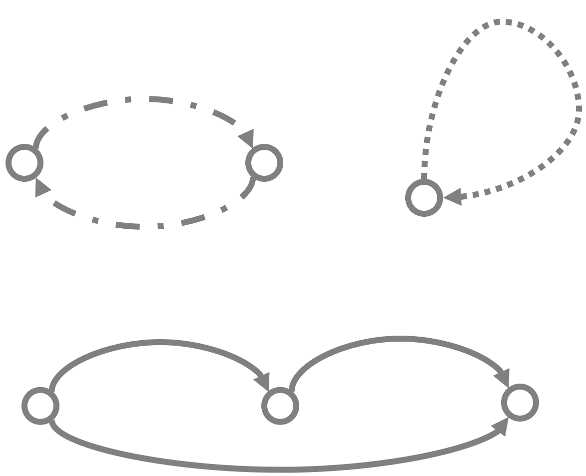
R injectief $\Leftrightarrow$ $R \circ R^{-1} \subseteq id_A$

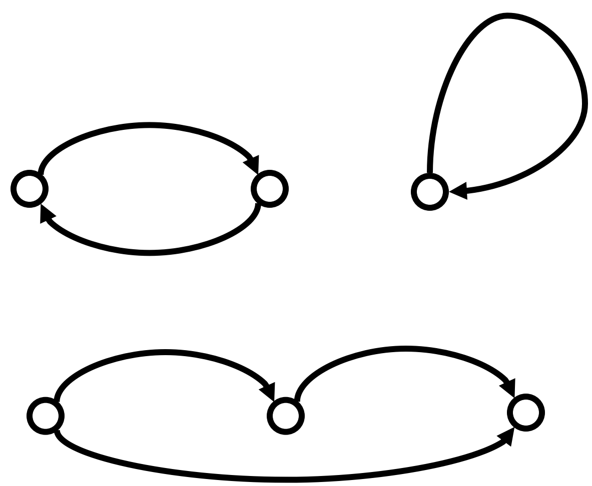
R totaal $\Leftrightarrow$ $R \circ R^{-1} \supseteq id_A$ (via inverse)

§2.8 equivalentierelaties

kleiner (-gelijk)

gelijke kleur

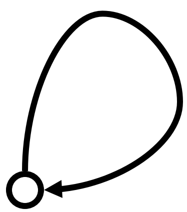


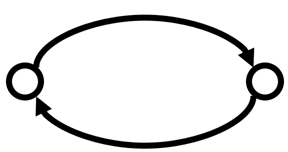


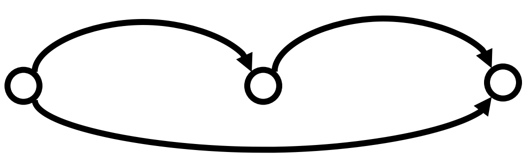
equivalentierelatie

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *equivalentierelatie* als

- *reflexief* xRx (alle $x \in V$)
- *symmetrisch* als xRy dan yRx (alle $x,y \in V$)
- *transitief* als xRy en yRz dan xRz (alle $x,y,z \in V$)





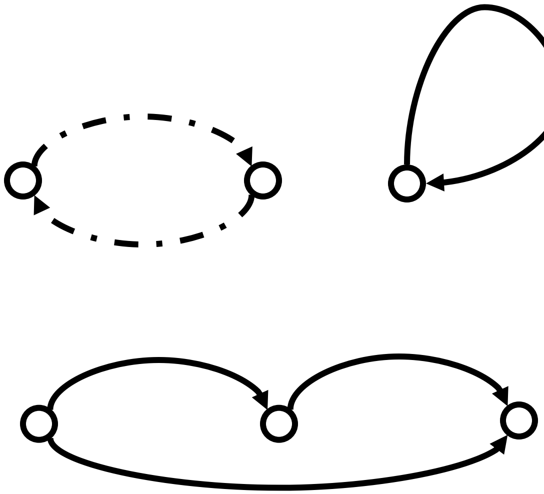


$\mathbb{Z}$	$x \leq y$	R		AS	T
$\mathbb{Z}$	$x < y$	IR		AS	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \emptyset$		S		
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR		AS	T
V	$x = y$	R	S	AS	T
$\mathbb{Z}^+$	$2x \geq y$	R			
‘gelijke kleur’		R	S		T

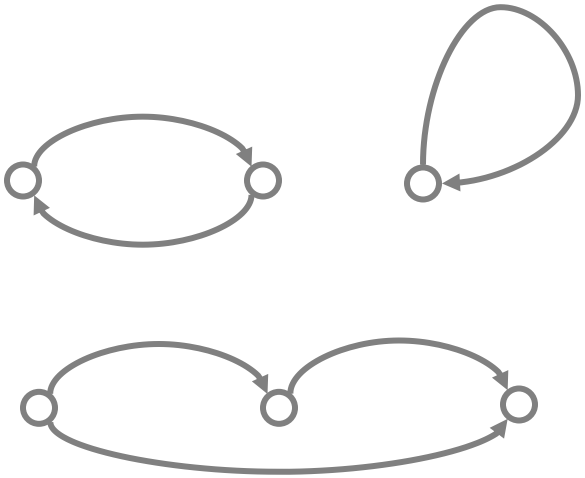
- evenwijdig
- gelijkvormig

§2.9 partiële ordeningen

kleiner-gelijk

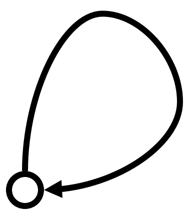


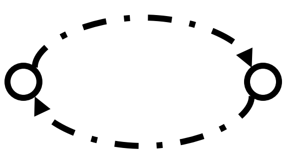
gelijke kleur

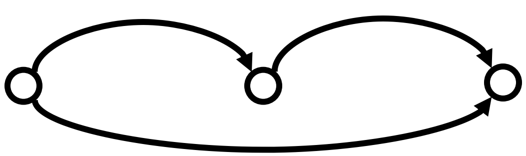


partiële ordening

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *partiële ordening* als
- *reflexief* xRx
- *antisymmetrisch* als xRy en yRx dan $x=y$
- *transitief* als xRy en yRz dan xRz







$\mathbb{Z}$	$x \leq y$	R		AS	T
$\mathbb{Z}$	$x < y$	IR		AS	T
$\mathcal{P}(U)$	$x \cap y = \varnothing$		S		
$\mathcal{P}(U)$	$x \subset y$	IR		AS	T
V	$x = y$	R	S	AS	T
$\mathbb{Z}^+$	$2x \geq y$	R			
‘gelijke kleur’		R	S		T

- deelverzameling
- deler (op $\mathbb{N}$)

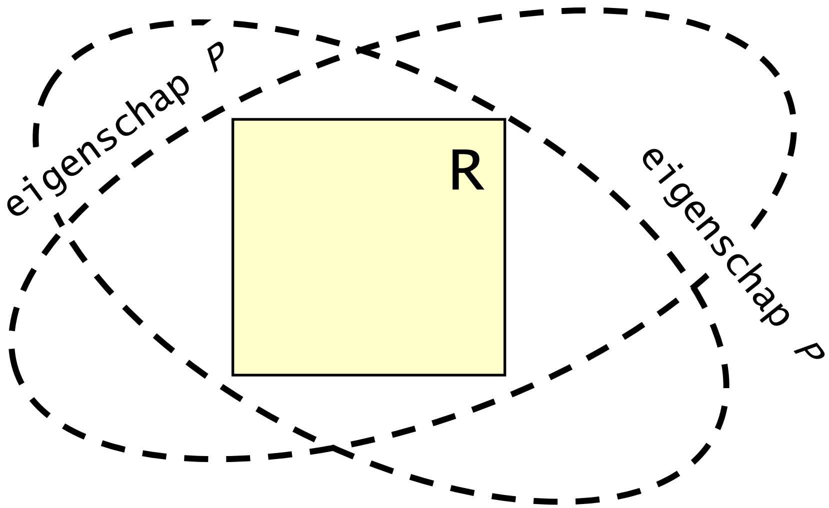
eigenschap *P*   *P*-afsluiting

P = reflexief, symmetrisch, transitief

kleinste relatie (met eigenschap *P*) die R omvat

'zo weinig mogelijk toevoegen'

bestaat er wel een kleinste ?



stelling

doorsnede van *transitieve* relaties is *transitief*

(willekeurig veel)

P is een eigenschap van relaties, bv.
P=reflexief, *P*=symmetrisch, *P*=transitief, …

Stel R heeft eigenschap *P* niet.

We zoeken naar de *P*-afsluiting van relatie R, dwz. kleinste relatie X (met eigenschap *P*) die R omvat, dus R⊆X.

Intuitief: zo weinig mogelijk aan R toevoegen zodat de relatie eigenschap *P* krijgt.

Bestaat die kleinste wel? Of zijn er misschien twee mogelijke X waarvan geen de kleinste is?

Ja bestaat: (bv. voor *P*=transitief)

stelling

doorsnede van *transitieve* relaties is *transitief*

(willekeurig veel)

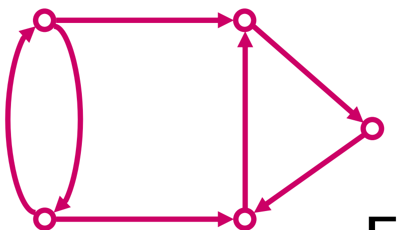
transitieve afsluiting

Laat $R \subseteq A \times A$ een relatie zijn. We definiëren:

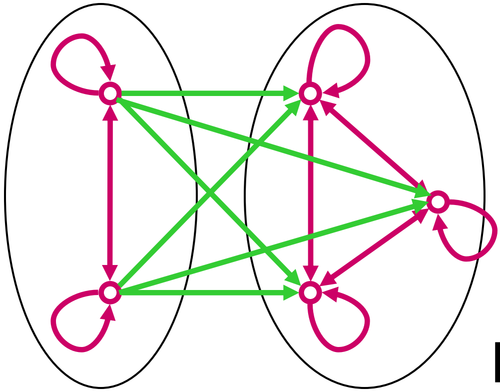
$R^0 = 1_A$, $R^1 = R$, $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n\mathrm{x}}$, voor $n \geq 2$.

transitieve afsluiting $R^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$

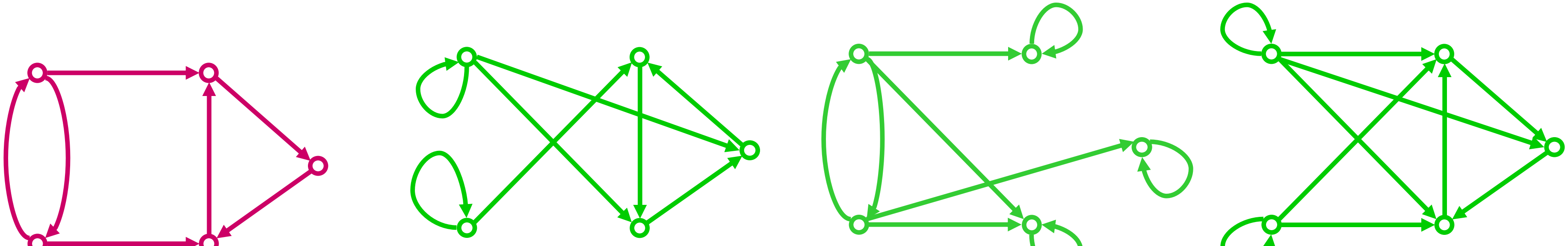
n-staps wandelingen



E

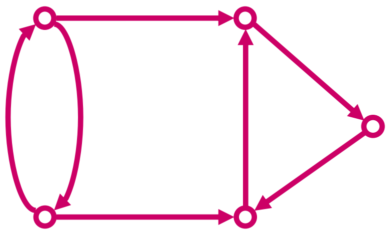


E^+



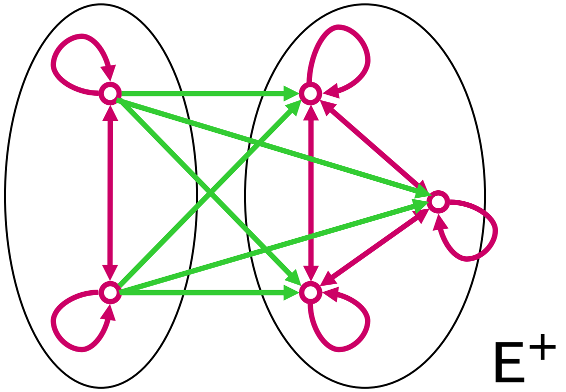
$E^1 = E$ E^2 E^3 E^4

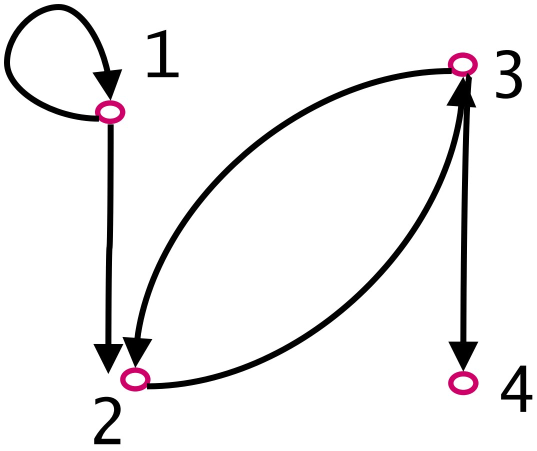
transitieve afsluiting



De transitieve afsluiting bestaat uit alle meer-staps wandelingen bij een gegeven relatie.
Bij een eindige begin-relatie zijn er dan veel, maar toch eindig veel, combinaties.

In het voorbeeld hiervoor kan het eindresultaat E^+ beschreven worden door twee componenten. Binnen elke component zijn alle punten verbonden, en verder gelden alle verbindingen van links naar rechts





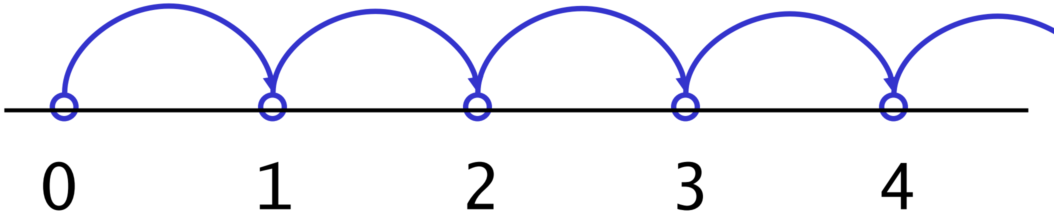
$R^+ =$

{ (1,1),(1,2),(1,3),
(1,4),
(2,2),(2,3),(2,4),
(3,2),(3,3),(3,4) }

oneindig

Een begrip als transitieve afsluiting is gedefinieerd ook als het domein van de relatie een *oneindige* verzameling is.

Hierna een voorbeeld op $\mathbb{N}$: de transitieve afsluiting van “+1” is gelijk aan de relatie “<”



$R = \{ (n,n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ‘+1’

$R^k = \{ (n,n+k) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ‘+k’

$R^+ = \{ (n,n+k) \mid n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^+ \}$ ‘<’

binaire relatie $R \subseteq A \times A$

Theorem 2.3

reflexieve afsluiting $R \cup id$

symmetrische afsluiting $R \cup R^{-1}$

transitieve afsluiting R^{+}

end...