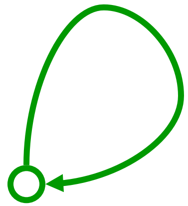
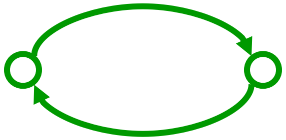
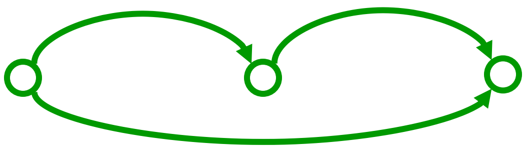
vandaag



equivalentie-relaties



reflexief, symmetrisch,
transitief



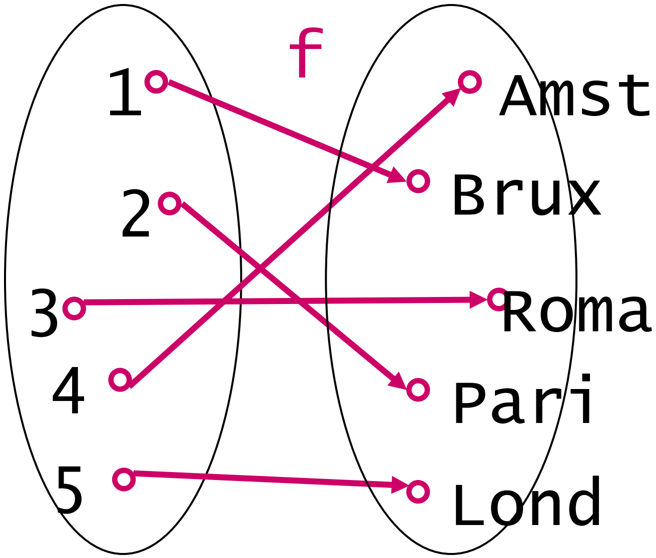
1. gelijkmachtigheid / aftelbaarheid
2. modulo rekenen
3. theorie

3.7 *Gelijkmachtigheid en aftelbaarheid*

aleph

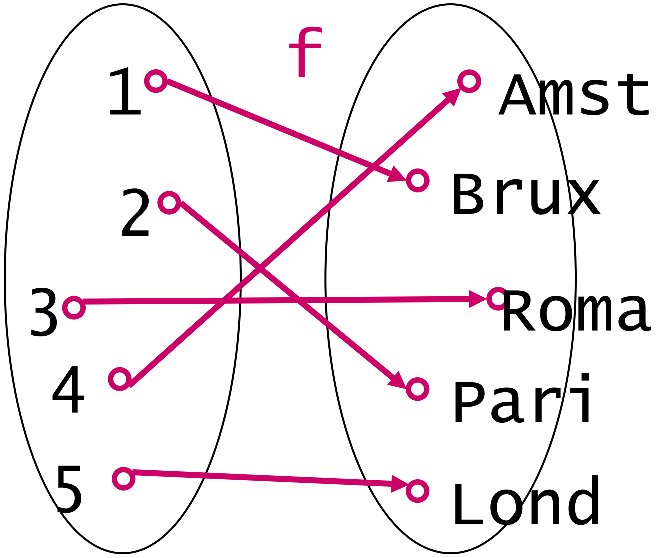
intuitie

- Amst
- Brux
- Roma
- Pari
- Lond


f
1
2
3
4
5
Amst
Brux
Roma
Pari
Lond

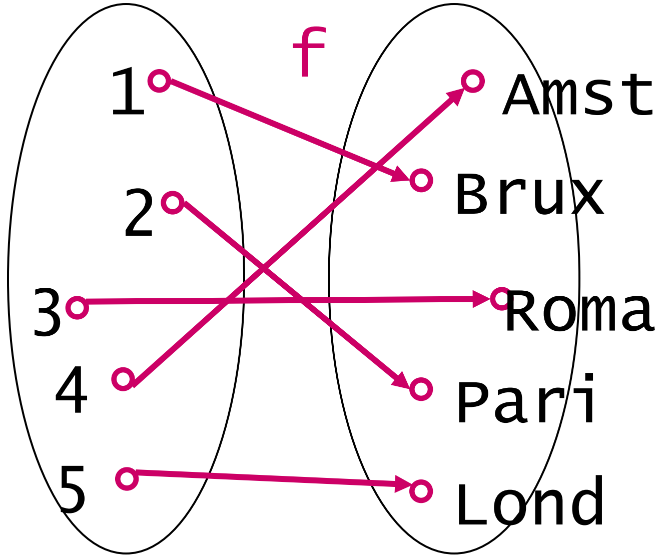
intuitie

A eindige verzameling.
tellen van de elementen van A is het geven van een bijectie tussen { 1,2, … , n } en A.



$1 \mapsto$ Brux
$2 \mapsto$ Pari
$3 \mapsto$ Roma
$4 \mapsto$ Amst
$5 \mapsto$ Lond

A eindige verzameling.
tellen van de elementen van A is het geven van een bijectie tussen { 1,2, … , n } en A.



$1 \mapsto$ Brux
$2 \mapsto$ Pari
$3 \mapsto$ Roma
$4 \mapsto$ Amst
$5 \mapsto$ Lond

oneindige verzamelingen ?
'meer/evenveel elementen' $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

Hilberts hotel

oneindig

$\mathbb{Z}$

… −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 …

oneindig

$\mathbb{Z}$

… −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 …

$\mathbb{Z}$ 0 1 2 3 …

−1 −2 −3 …

even

E 0 2 4 6 …

ℕ 0 1 2 3 4 5 6 7 …

E 0 2 4 8 10 …

Zoiets geldt ook voor de even getallen: dat zijn er minder dan de natuurlijke getallen (als deelverzameling) maar toch evenveel (als gelijkmachtig).

oneindig

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$

$0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto -1 \quad 2 \mapsto 1 \quad 3 \mapsto -2 \quad 4 \mapsto 2 \quad 5 \mapsto -3 \quad 6 \mapsto 3 \quad \ldots$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{als } n \text{ even} \\ -(n+1)/2 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

Definitie

Een verzameling A heet *oneindig aftelbaar* als er een bijectie is van $\mathbb{N}$ naar A.

A is *aftelbaar* als A eindig is of oneindig aftelbaar

$\mathbb{Z}$ is aftelbaar.

$\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	…
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	…
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	…
⋮	⋮			⋮		

breuken zijn aftelbaar

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
1,	2,	1/2,	3,	1/3,	4,	3/2,	2/3,	1/4,	5,	1/5,	6,	5/2,	4/3,	

surjectie vs. bijectie !

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	…
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	…
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	…
⋮	⋮			⋮		

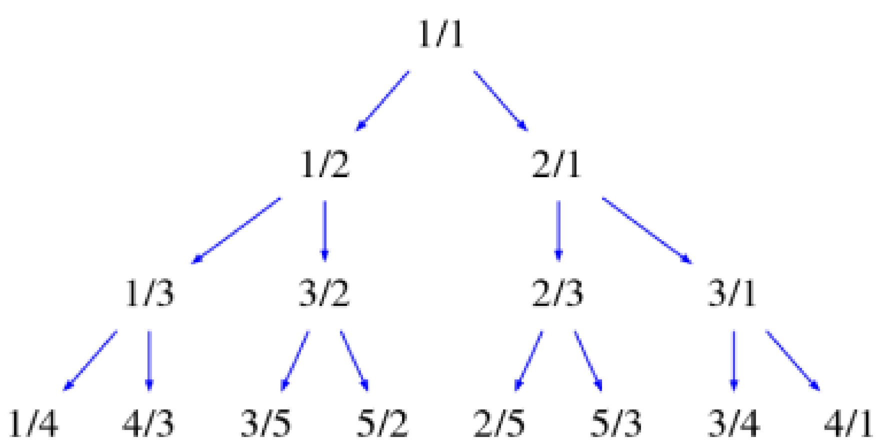
Cantorwandeling

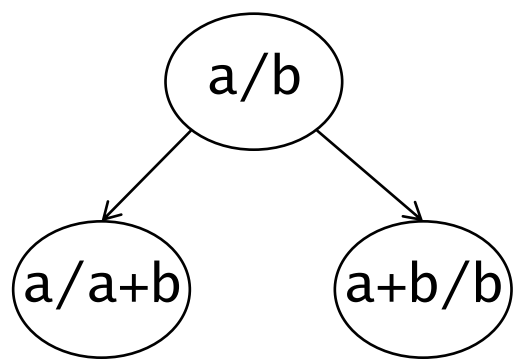
$\mathbb{Q}$ is aftelbaar.

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$

Calkin-Wilf: oneindige binaire boom waarin elke (positieve) breuk precies één keer voorkomt.

Voordeel: geen herhalingen, toch super-simpel.
Nadeel: hoe weten we die ‘precies één keer’ ?





Calkin, N. and Wilf, H. S. "Recounting the Rationals." *Amer. Math. Monthly* **107**, 360-363, 2000.

algemener

$f\colon \mathbb{N} \to A$

zie volgende slides …

formeel: aftelbaar $\Leftrightarrow$ bijectie
surjectie $\approx$ ‘aftelling met herhaling’
máár herhalingen kun je verwijderen

vereniging twee aftelbare verzamelingen
ook aftelbaar: om-en-om
(en herhalingen verwijderen)

vereniging aftelbaar veel aftelbare …
ook aftelbaar: cantor wandeling

(oneindig) aftelbaar ⇔ bijectie met $\mathbb{N}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	$\mathbb{N}$
0	2	0	4	2	6	4	8	6	4	…	surjectie

Als een surjectie $f\colon \mathbb{N} \to A$ bestaat is A aftelbaar

vgl. breuken

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	$\mathbb{N}$
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	…	bijectie

Als A en B aftelbaar dan ook $A \cup B$ aftelbaar

$f\colon \mathbb{N} \to A$ $\quad g\colon \mathbb{N} \to B$

A:	1	2	4	5	7	11	13	17	19	23 …
B:	3	5	9	11	15	16	21	23	27	…

Als een surjectie $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bestaat is A aftelbaar

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	$\mathbb{N}$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	…	A eindig

geen bijectie mogelijk !

aftelbaar $\Leftrightarrow$ eindig of bijectie met $\mathbb{N}$

generalisatie

A aftelbaar:

eindig

oneindig bijectie $f: \mathbb{N} \to A$

'aftelling' zonder *herhaling* $f(0), f(1), f(2), \ldots$

> Als een surjectie $f: \mathbb{N} \to A$ bestaat is A aftelbaar

oneindig: bijectie maken, herhalingen verwijderen

$g(0) = f(0)$

$g(n) = f(i)$ eerste waarde ongelijk aan $g(0), g(1), \ldots, g(n-1)$

vgl. breuken

> Als A en B aftelbaar dan ook $A \cup B$ aftelbaar

$f: \mathbb{N} \to A \quad g: \mathbb{N} \to B$

om-en-om: $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), \ldots$

	0	1	2	3	4	…

Als A_i aftelbaar dan $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ aftelbaar

vgl. breuken

$f_i : \mathbb{N} \to A_i$

$$\begin{array}{cccccc}
f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & f_0(4) & \dots \\
f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & f_1(4) & \dots \\
f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) & \dots \\
f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & &
\end{array}$$

de *eindige* deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn aftelbaar.

overaftelbaar

Er bestaat géén bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$

(zonder bewijs)

'diagonalisatie'

probleempje: 0.9999… = 1 = 1.0000…

maw $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar

Cantor

$\mathbb{R}$ is *over*aftelbaar

Men gebruikt “diagonalisatie” om te laten zien dat de reeële getallen niet aftelbaar zijn.
Dat heeft technisch een vervelende kant. Je moet eigenlijk weten dat elk rijtje cijfers ‘achter de komma’ een uniek getal vastlegt.

We gaan iets anders doen. We laten zien dat de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ niet aftelbaar is. Sterker: geen enkele machtsverzameling is gelijkmachtig met de verzameling zelf!

leugenaarsparadox ‘ik lieg’

Barber paradox.
http://en.wikipedia.org/wiki/Barber_paradox

paradox van Russell: er bestaat geen verzameling van alle verzamelingen! (Kies maar eens de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet bevatten …)

Er bestaat géén bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\wp(\mathbb{N})$

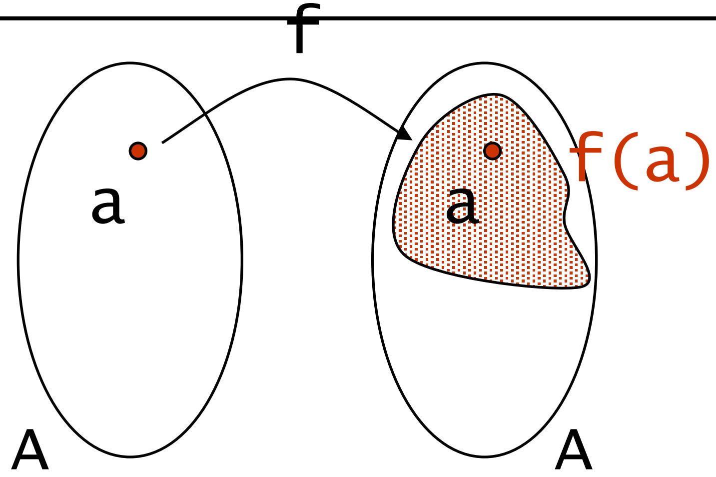
$V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, \ldots$

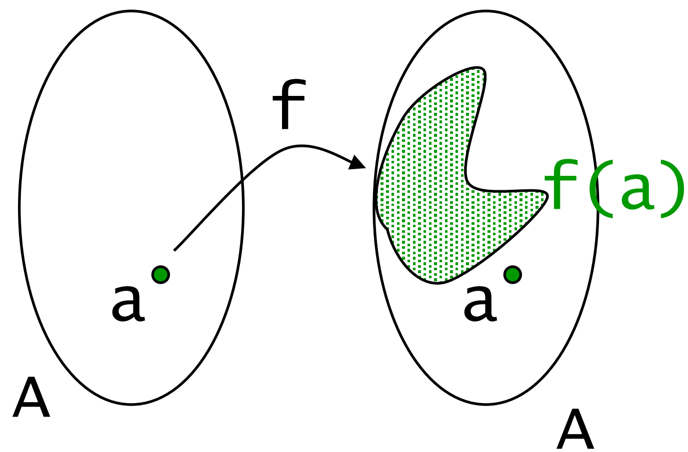
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	…
V_0	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	…
V_1	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	…
V_2	−	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−	+	…
V_3	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	…
V_4	−	+	+	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	…
V_5	+	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−	−	−	…
V_6	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−	+	…
…															
V	−	−	−	+	+	+	+	…							

$$i \in V \Leftrightarrow i \notin V_i$$

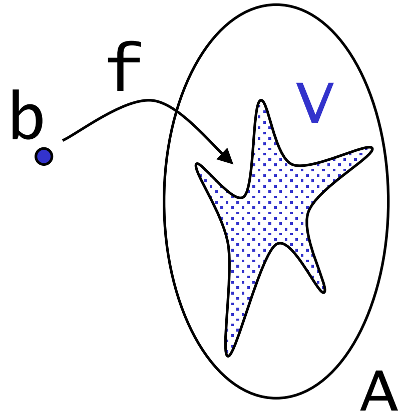
generalisatie: theorem 3.4

Er bestaat géén bijectie tussen A en $\wp(A)$



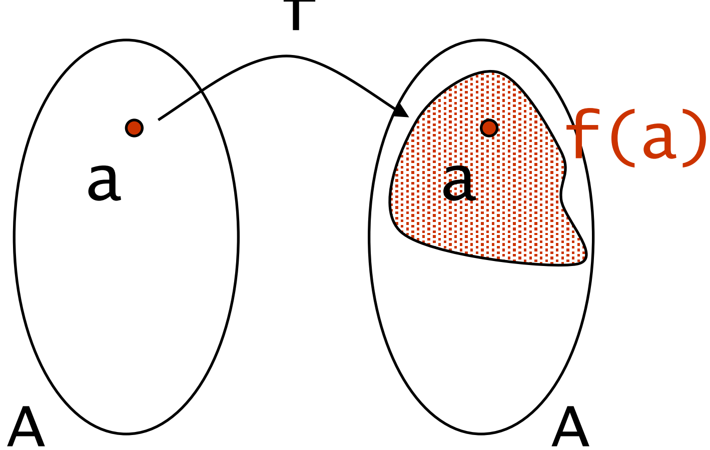


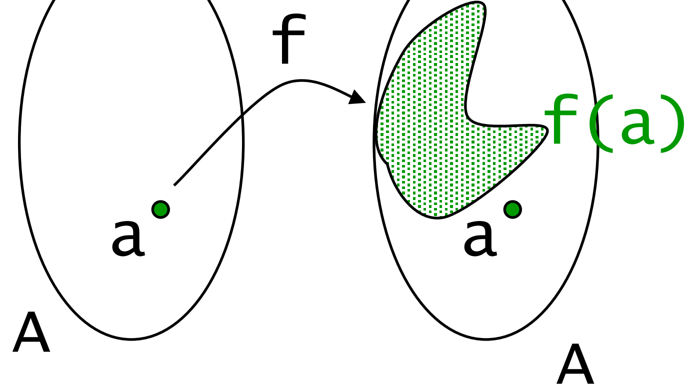
$$V = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}$$



generalisatie: theorem 3.4

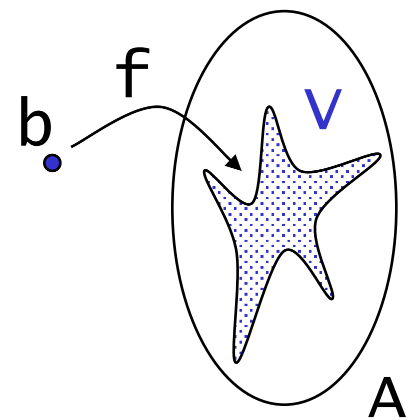
Er bestaat géén bijectie tussen A en $\wp(A)$



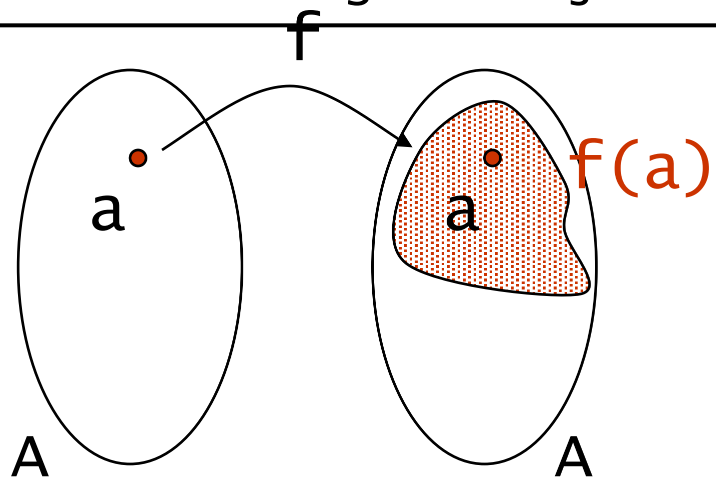


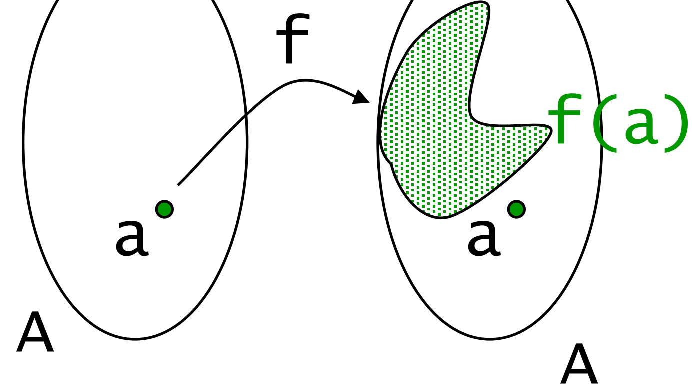
$$\boxed{V = \{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\}}$$

$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$



Er bestaat géén bijectie tussen A en $\wp(A)$

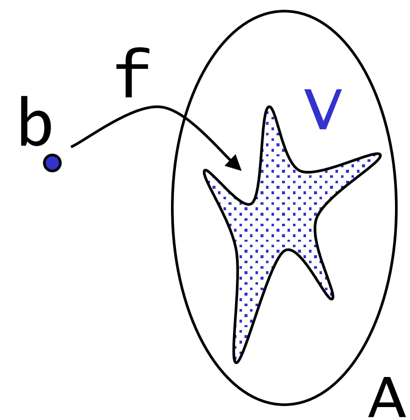




$$\boxed{V = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}}$$

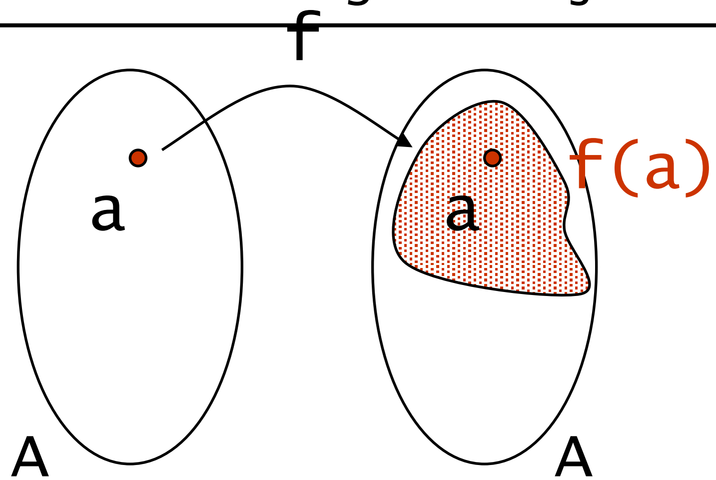
$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$

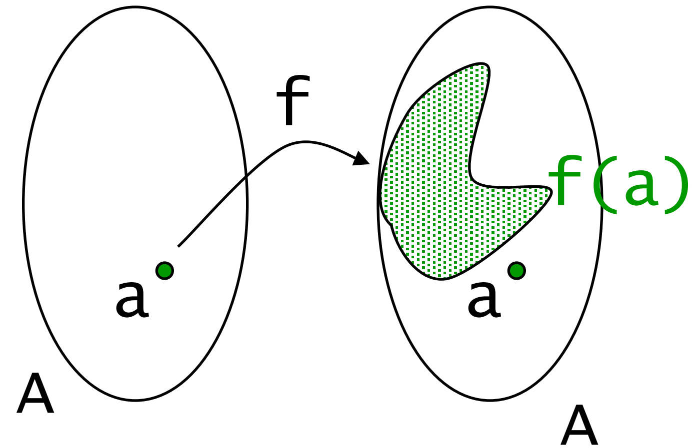
$$b \in V \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b \notin f(b)$$



generalisatie: theorem 3.4

Er bestaat géén bijectie tussen A en $\wp(A)$





$$V = \{\ a \in A \mid a \notin f(a)\ \}$$

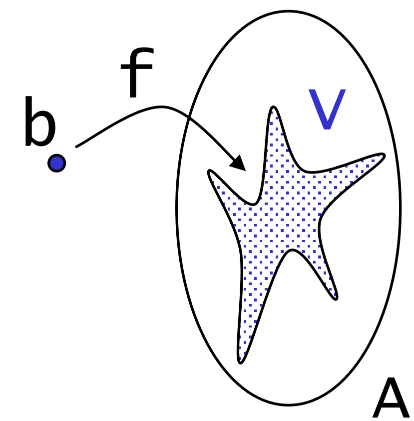
$V \subseteq A$ f surjectief: $V = f(b)$

$$b \in V \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b \notin f(b)$$

máár $V = f(b)$!

$$b \in f(b) \Leftrightarrow b \notin f(b)$$

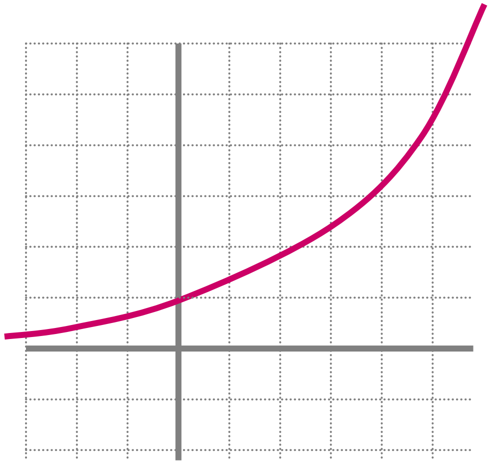
tegenspraak

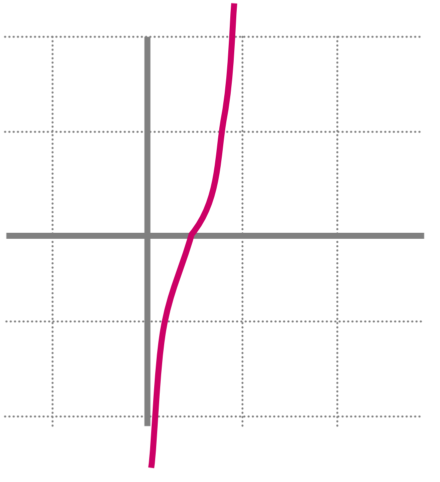


gelijkmachtigheid

Twee verzamelingen A en B heten *gelijkmachtig* als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$
Er bestaat een bijectie tussen $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$

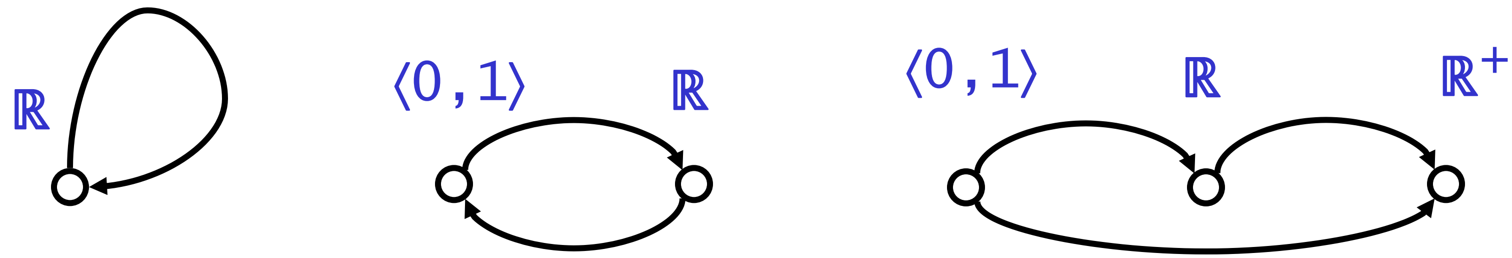




$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, en $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig

A en $\wp(A)$ zijn niet gelijkmachtig

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, en $\langle 0,1\rangle$ en $\mathbb{R}$ zijn gelijkmachtig



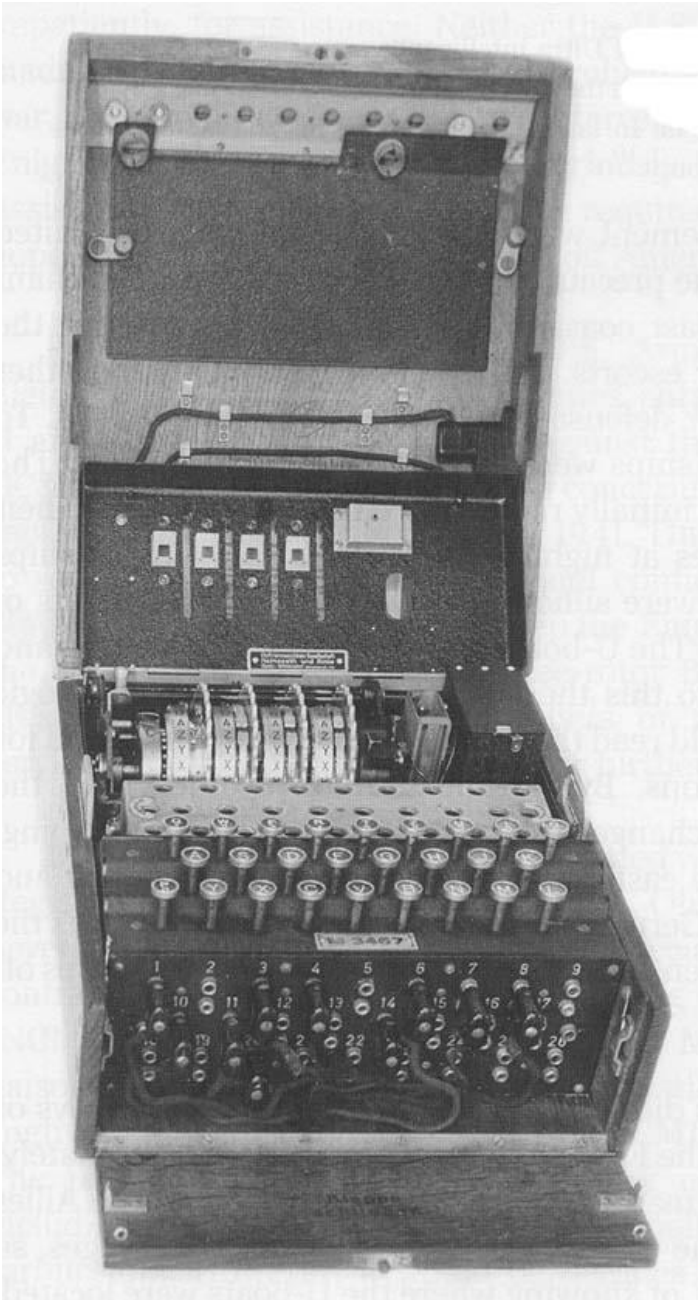
- *reflexief*
  $\mathrm{id} : A \to A$
- *symmetrisch*
  $f : A \to B$ dan $f^{-1} : B \to A$
- *transitief*
  $f : A \to B$ en $g : B \to C$
  dan $g \circ f : A \to C$

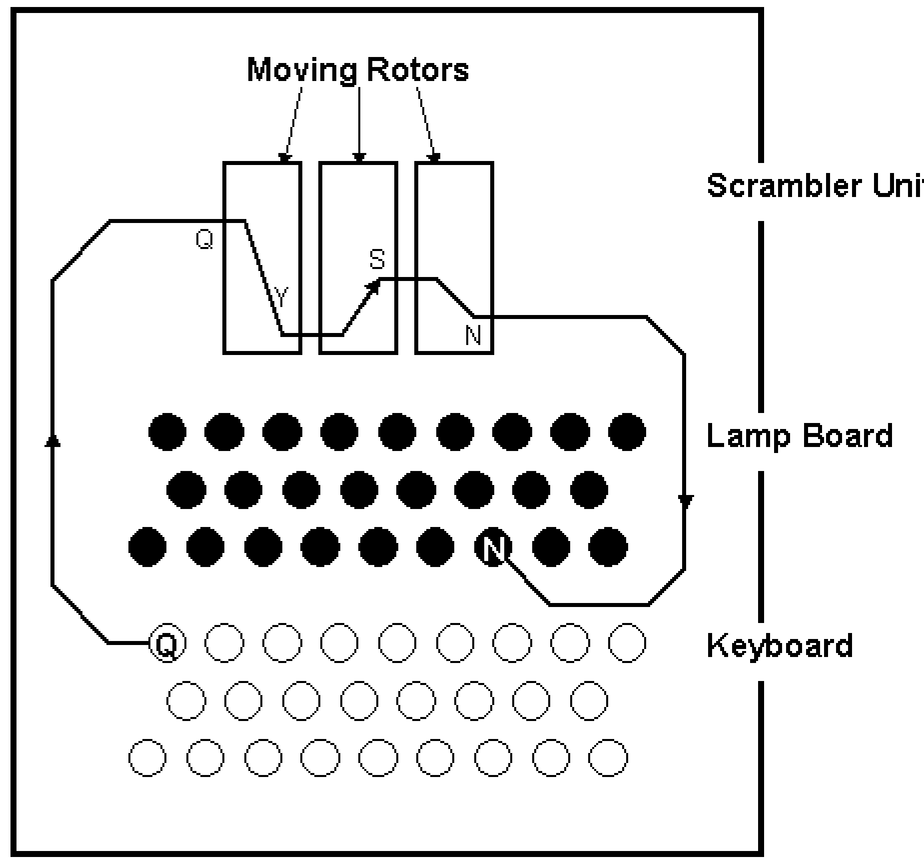
equivalentierelatie

onze helden

2012 Turing-jaar

enigma





wanneer berekenbaar?

Champernowne constant

$= 0.12345678910111213141516171819202122\ldots$

Sloane A033307

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288\ldots$

Sloane A000796

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807\ldots$

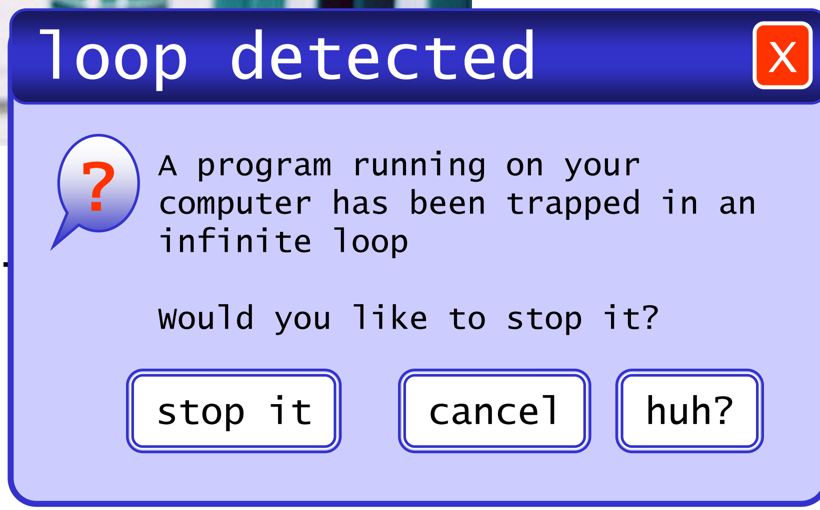
Sloane A002193

programma dat elke decimaal kan berekenen

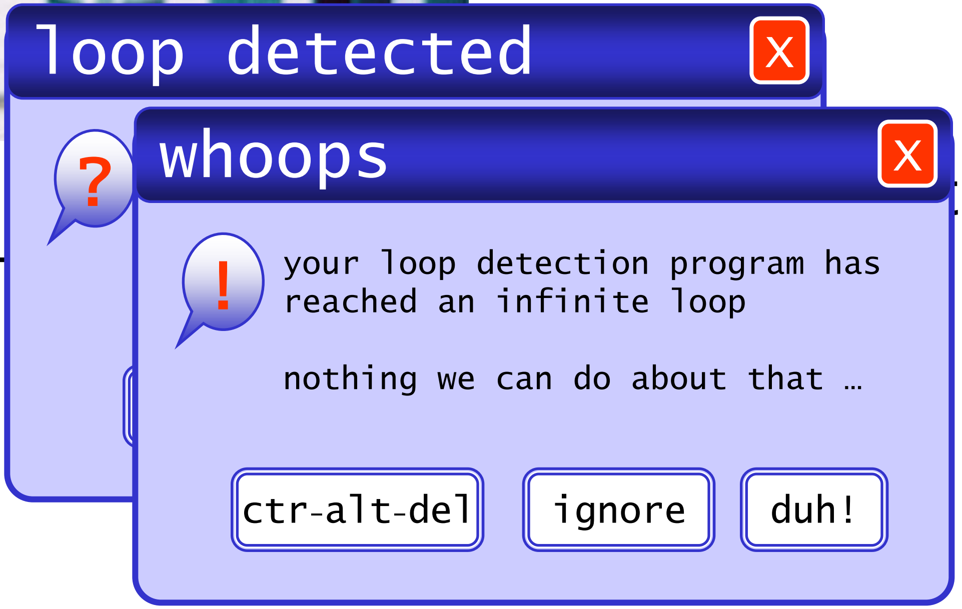
zijn alle getallen berekenbaar? *NEE*

bestaat er een programma dat nagaat of een programma in een oneindige loop zal raken?

bestaat er … gaat of een
programma … zal raken?



bestaat er … of een
programma … raken?



11.8 *modulo rekening*

ook §3.4 modular arithmetic

§11.8 klokrekenen

17 u.
8 uur later:
01 u.

$17+8 \equiv 1\ (24)$

optellen met de klok

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27

$$1 + 3 = 4$$
$$8 + 17 = 25$$

$n \in \mathbb{N}^+$

a en b heten *congruent modulo* n
als a-b deelbaar is door n

'dezelfde rest'

$a \equiv b \pmod{n}$

equivalentierelatie:

- $a \equiv a$
  $a - a = 0$
- $a \equiv b$ dan $b \equiv a$
  $b - a = -(a - b)$
- $a \equiv b$ en $b \equiv c$ dan $a \equiv c$
  $a - c = (a - b) + (b - c)$

restklassen

$n \in \mathbb{N}^+$; a en b heten *congruent modulo* n
als a-b deelbaar is door n $a \equiv b \pmod{n}$
De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

restklassen modulo 7

$\overline{0}$ $[0] = \{ \ldots -14\ -7\ 0\ 7\ 14 \ldots \}$
$\overline{1}$ $[1] = \{ \ldots -13\ -6\ 1\ 8\ 15 \ldots \}$
$\overline{2}$ $[2] = \{ \ldots -12\ -5\ 2\ 9\ 16 \ldots \}$
$\overline{3}$ $[3] = \{ \ldots -11\ -4\ 3\ 10\ 17 \ldots \}$

$\overline{6}$ $[6] = \{ \ldots -8\ -1\ 6\ 13\ 20 \ldots \} = [-8]$ etc.

notatie

$-8 \equiv 13 \pmod{7}$ of $\overline{-8} = \overline{13}$
getallen klassen

als $a \equiv a'$ en $b \equiv b'$ (modulo n)
dan $a+b \equiv a'+b'$ en $a-b \equiv a'-b'$ en $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ (modulo n)

dus: het maakt niet uit, welk element uit de restklasse gekozen wordt

vb. modulo 7 $72 \equiv 2$ & $143 \equiv 3$

$72+143 = 215$ $2+3=5$ maar $215 \equiv 5$

$72-143 = -71$ $2-3=-1$ maar $-71 \equiv -1$

$72 \cdot 143 = 10296$ $2 \cdot 3=6$ maar $10296 \equiv 6$

want veelvouden van n …

$$(a+b)-(a'+b') = (a-a')+(b-b')$$
$$(a-b)-(a'-b') = (a-a')-(b-b')$$
$$a \cdot b-a' \cdot b' = a(b-b')+b'(a-a')$$

laatste cijfer

wat is het laatste cijfer van 3^{234} ?

modulo 10

machten van 3

$1 \quad 3 \quad 9 \quad 3^3=27 \quad 3^4=27\cdot 3\equiv 7\cdot 3\equiv 1 \quad (\text{mod } 10)$

$3^{234} = 3^{4\cdot 58+2} = (3^4)$^$58 \cdot 3^2 \equiv 1^{58}\cdot 9 \equiv 9$

weekdagen

```
  1  1 jan 00 za [1]
  2  2 jan 00 zo [2]
   …
 31 31 jan 00
 32  1 feb 00 di [4]
   …
366 31 dec 00 zo [2]
   …
xxx 13 mei 23 ?? [?]
```

1	za
2	zo
3	ma
4	di
5	wo
6	do
7	vr

23 jaar · 365 dagen/jaar
+ 6 schrikkels
+ 31+28+31+30+13 dagen

modulo 7

$23 \cdot 365 + 6 + 31+28+31+30+13$
$\equiv 2 \cdot 1 + 6 + 3+0+3+2+6 \equiv 22 \equiv 1$
zaterdag

voor oneven x:
x^2-1 deelbaar door 8

basis
$8|1^2-1=0$
inductiestap
$(x+2)^2-1 =$
$x^2+4x+3 =$
$x^2-1 + 4(x+1)$

$8|x^2-1$ aanname
$2|x+1$ (even!)
$8|4(x+1)$

modulo 8 oneven x
$x^2-1\equiv 0$ dwz $x^2\equiv 1$
klassen 1 3 5 7 :
$1^2= 1\equiv 1$
$3^2= 9\equiv 1$
$5^2=25\equiv 1$
$7^2=49\equiv 1$

als $x\equiv y$
dan $x^2\equiv y^2$

zonder modulo-rekenen:
$(8k+5)^2=64k^2+80k+24+1$ is 8-voud + 1

voor oneven x:
x^2-1 deelbaar door 8

inductie, modulo rekenen, …
nog een manier

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

twee opvolgende even getallen
één deelbaar door vier (andere door 2)

m deelbaar door 9
als som cijfers m deelbaar door 9

$232029 = 25781 \cdot 9$
$2+3+2+0+2+9 = 18$

modulo 9
$10 \equiv 1$
$10^n \equiv 1^n \equiv 1$

$c_k \ldots c_2 c_1 c_0 =$
$c_k 10^k + \ldots + c_1 10^1 + c_0 10^0 \equiv$
$c_k + \ldots + c_1 + c_0$

$\Sigma_{n=0}^{k} c_n 10^n \equiv \Sigma_{n=0}^{k} c_n$

getal $\equiv$ som cijfers

modulo 6

[1] $\bar{1}$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_6$

‘gewone’ rekenregels:
commutatief, associatief,
distributief, een, nul
maar *niet* $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ‘nuldelers’

rekenen met restklassen

modulo 7

[1] $\bar{1}$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

‘gewone’ rekenregels:
commutatief, associatief,
distributief, een, nul
en *wel* $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ ‘nuldelers’

2a

Equivalentie-relaties

aftelbaarheid
modulo rekening

vergelijkingen oplossen

$3x^2-4x+6 = 2x^2-2x+9$

$x^2-2x-3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x-3=0 \lor x+1=0$

$x=3 \lor x=-1$

paden in grafen

*ongericht!

$p \text{-}\!\succ q \quad q \text{-}\!\succ r \Rightarrow p \text{-}\!\succ r$

$p \text{-}\!\succ p$

$p \text{-}\!\succ q \Rightarrow q \text{-}\!\succ p$ (*)

samenhangscomponent

schakelen?

$a \leq b \leq c$

$a \subseteq b \subseteq c$

$a \neq b \neq c$

$a \approx b \approx c$

gelijkmachtigheid

$f:A\to B \quad g:B\to C \Rightarrow g\circ f:A\to C$

$f:A\to B \Rightarrow f^{-1}:B\to A$

$id:A\to A$

breuken

$1/2 = 2/4 = 3/6 = \ldots$

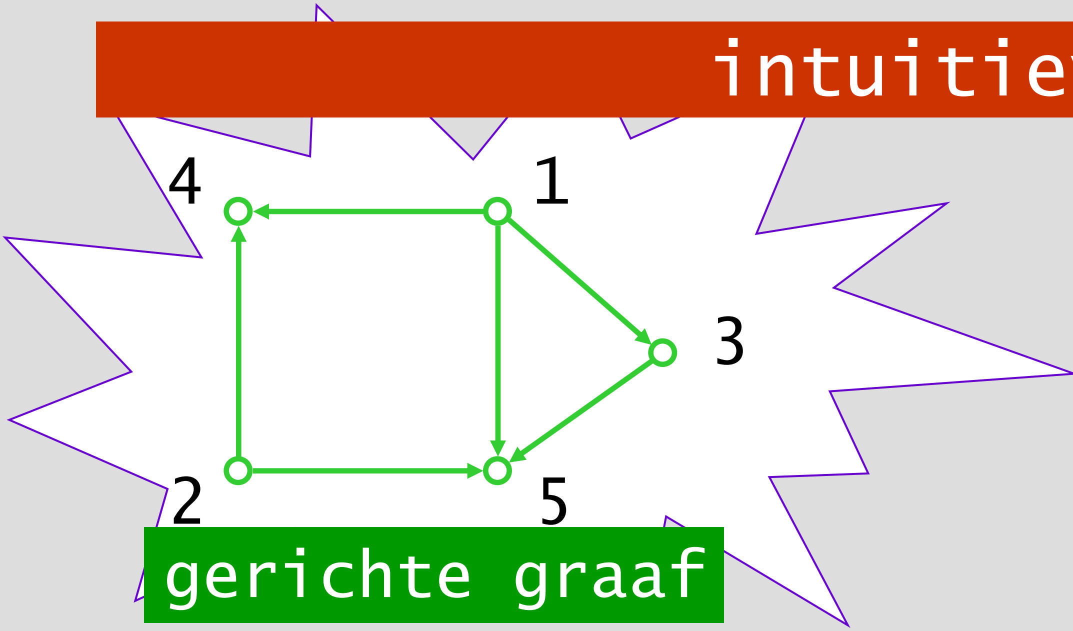
$(1,2)\sim(2,4)\sim(3,6)$

zoeken

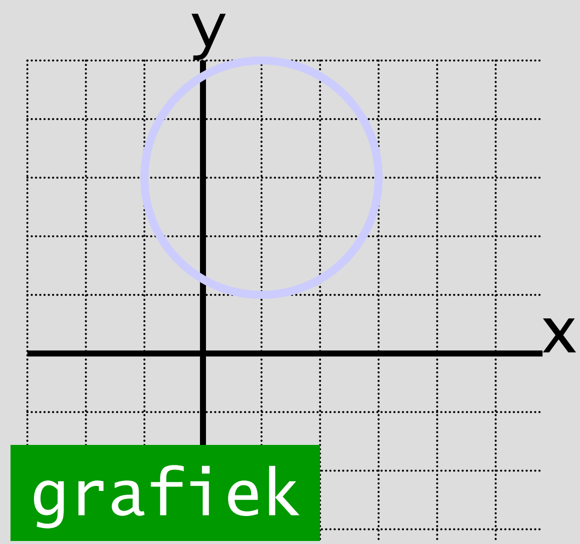
boomstructuur

‘dertig’ < ‘drie’

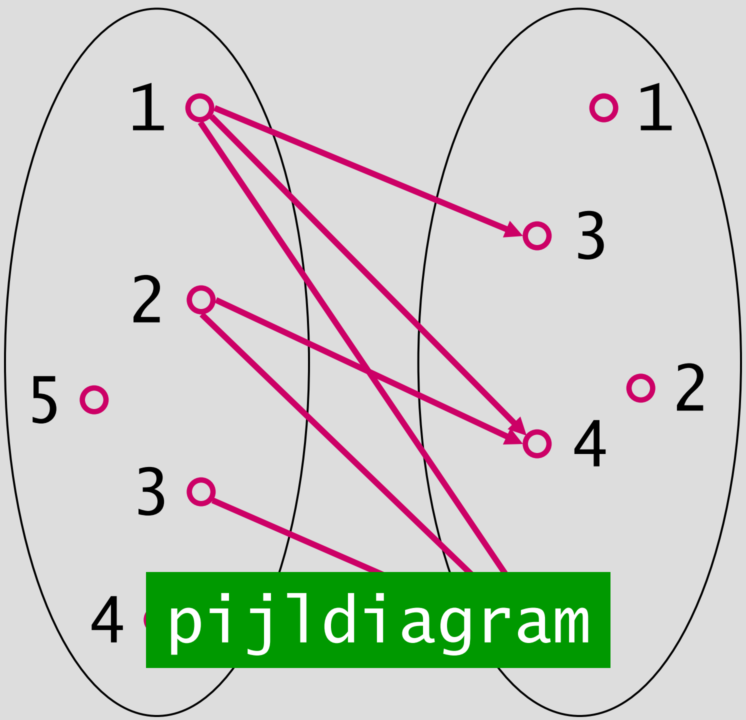
intuitieve representatie



gerichte graaf



grafiek



pijldiagram

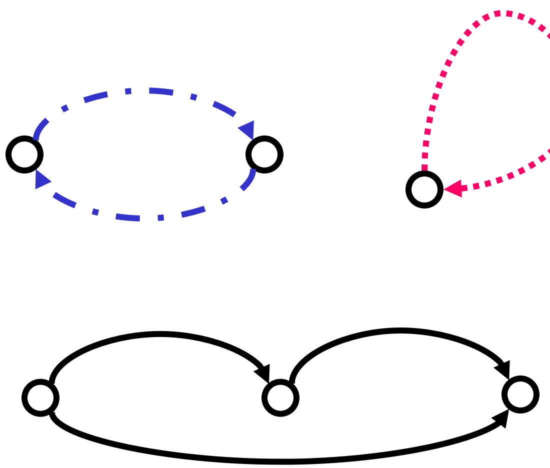
$$
\begin{array}{cc}
 & j \\
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} i\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \ \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
$$

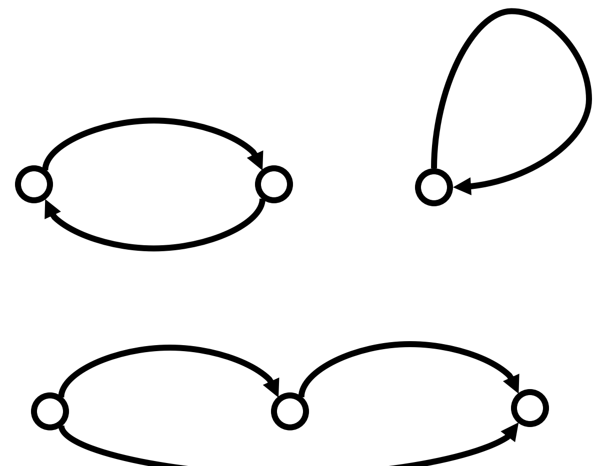
matrix

eigenschappen

kleiner

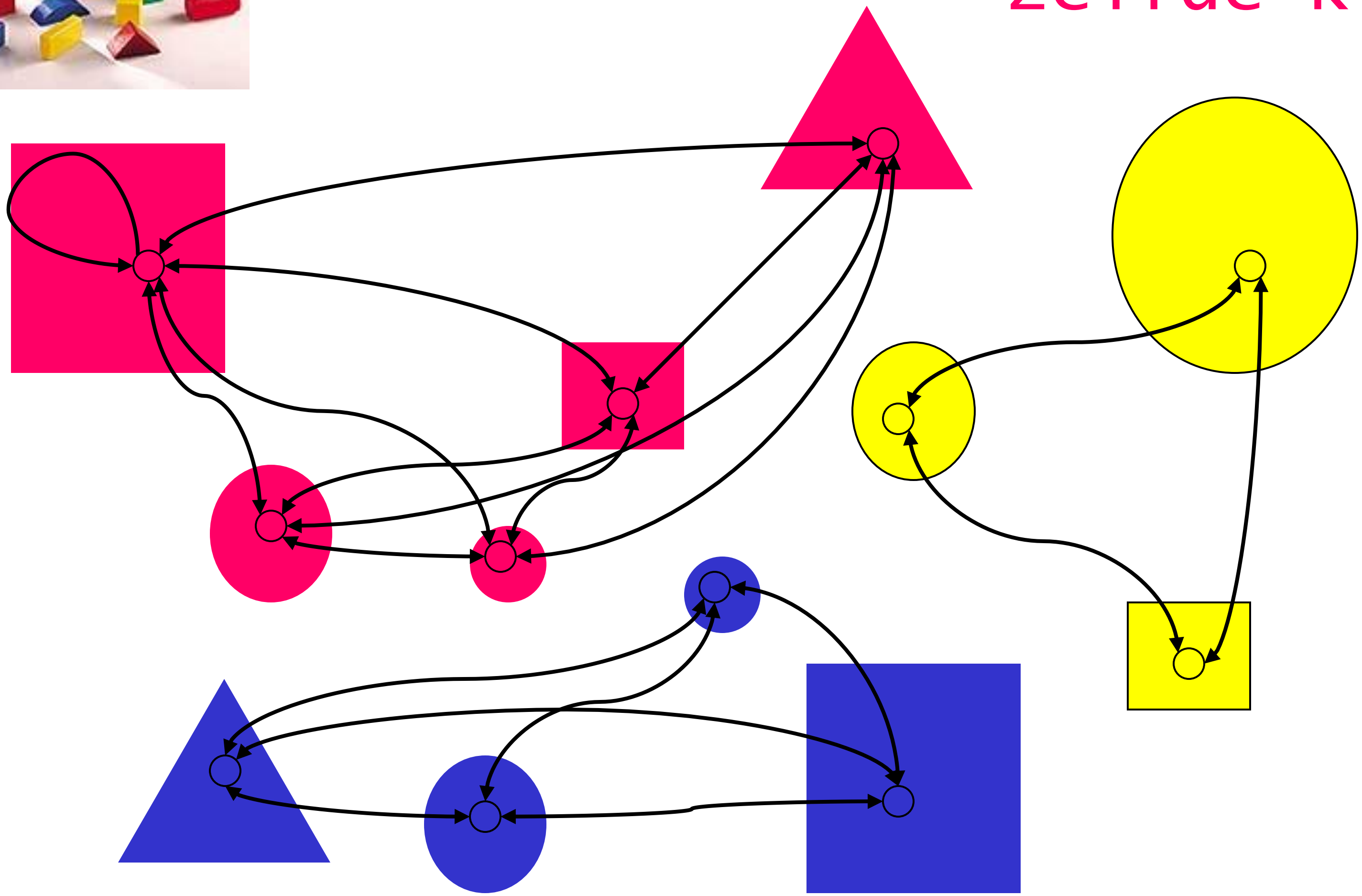
gelijke kleur





blokkenwereld

even groot
zelfde vorm
* zelfde kleur



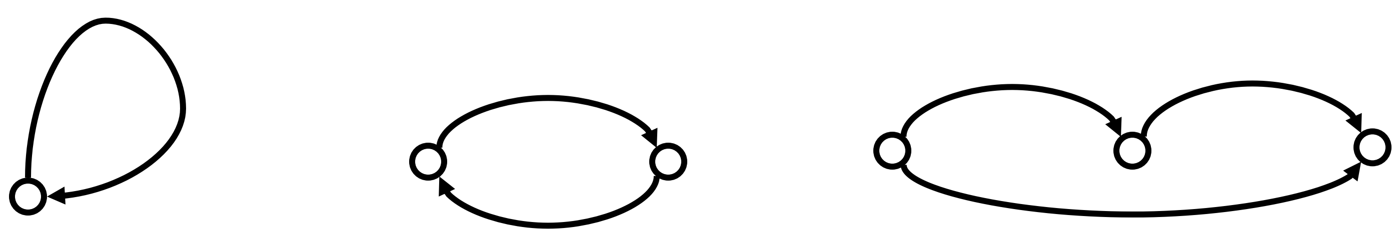
eigenschappen

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet

- *reflexief* als xRx voor alle $x \in V$
- *irreflexief* als xRx voor geen $x \in V$

- *symmetrisch* als xRy impliceert dat yRx (voor alle $x,y \in V$)
- *anti-symmetrisch* als xRy en yRx impliceren dat $x=y$ (voor alle $x,y \in V$)

- *transitief* als xRy en yRz impliceren dat xRz (voor alle $x,y,z \in V$)



binaire relatie $R \subseteq A \times A$

R reflexief $\Leftrightarrow id \subseteq R$

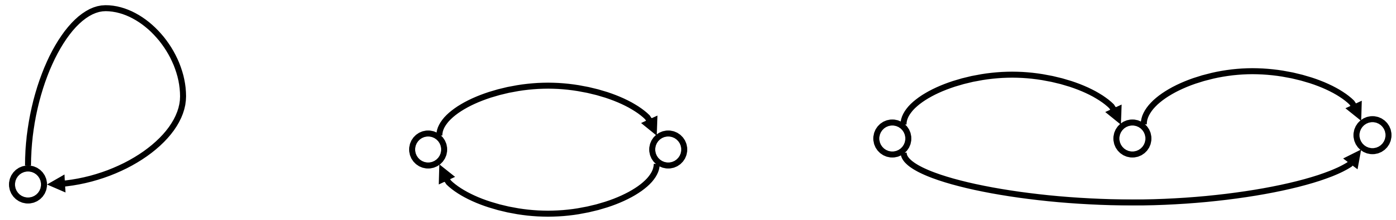
R irreflexief $\Leftrightarrow id \cap R = \varnothing$

R symmetrisch $\Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R$

R anti-symmetrisch $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq id$

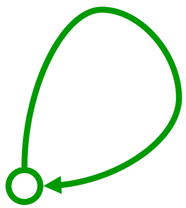
R transitief $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

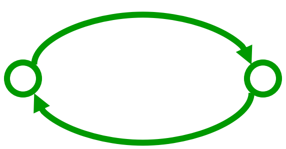
$\Leftrightarrow R^n \subseteq R$ voor alle $n \in \mathbb{N}^+$

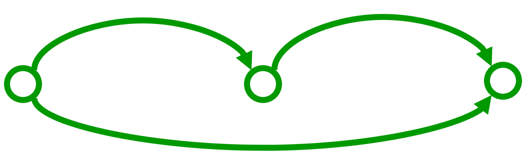


§2.8 equivalentie

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *equivalentierelatie* als R
- reflexief
- symmetrisch, en
- transitief is



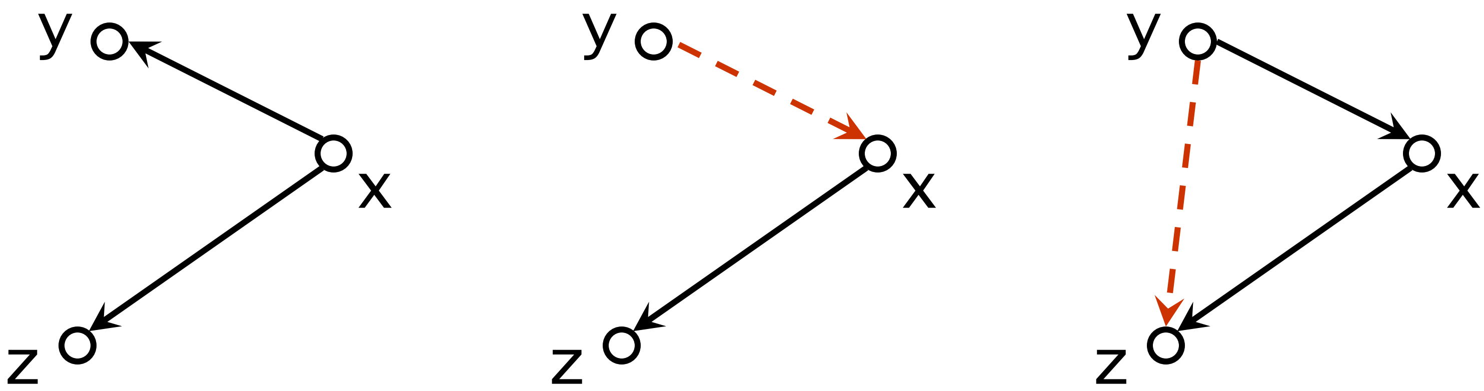




gelijkheid
gelijkmachtig (verzamelingen)
breuken (paren gehelen)
zelfde letters (strings)
congruentie (figuren)
evenwijdig (lijnen)
gelijke kleur
rest modulo n (gehele getallen)
$f: V \to P \quad f(x)=f(y)$
pad (knopen ongerichte graaf)

equivalentieklassen

Een relatie $R \subseteq V \times V$ heet *equivalentierelatie* als R reflexief, symmetrisch, en transitief is



xRy & xRz

yRx

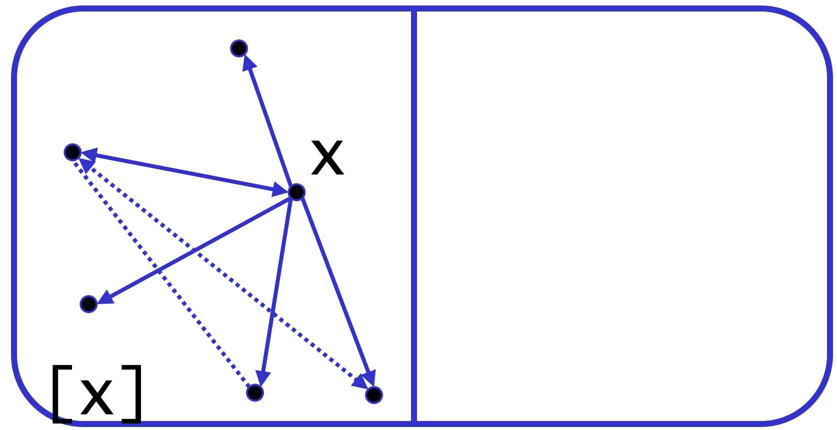
yRz

theorem 2.6

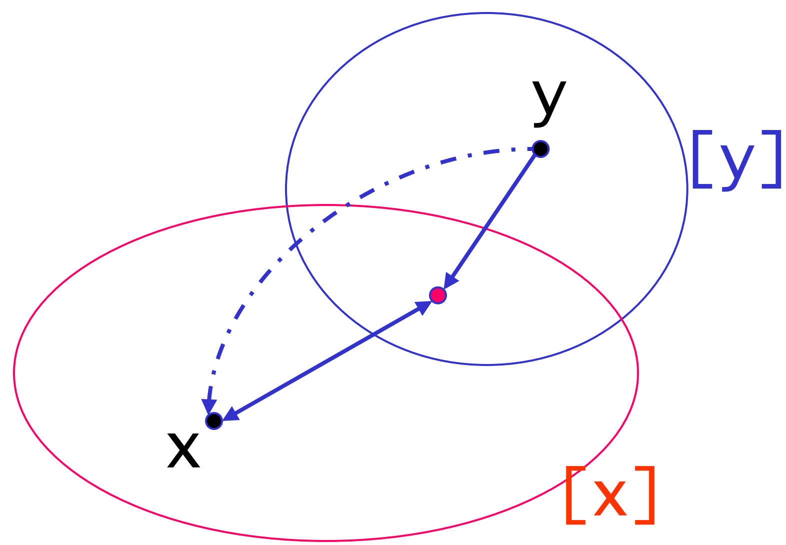
equivalentierelatie:reflexief,symmetrisch,transitief

De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

partitie!



- $x \in [x]$
- equivalent:
  1. xRy
  2. $y \in [x]$
  3. $[x]=[y]$
  4. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$



equivalentieklassen

De *equivalentieklasse* van x is $[x]_R = \{ y \in V \mid xRy \}$

- **kleur**

[b] blokken met gelijke kleur als b
wordt bepaald door ***kleur***

- **gelijke rest na deling door 7**

[3] = { … , -11, -4, 3, 10, 17, … }
bepaald door **rest** : 7 klassen
[0] = { … , -14, -7, 0, 7, 14, … }
zeven-vouden

- **afstand tot oorsprong $\mathbb{R}^2$**

$(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2)$ als $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$
[(2,1)] alle punten **afstand** $\sqrt{5}$
cirkels !

end...